UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

División de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Física

FS1111 - Física I

Guía de Física I

Autor:

Samjay Mustafa

Carnet: 19-10455

Carrera: Ingeniería mecánica

Sartenejas, 08 de Agosto de 2025

PREFACIO

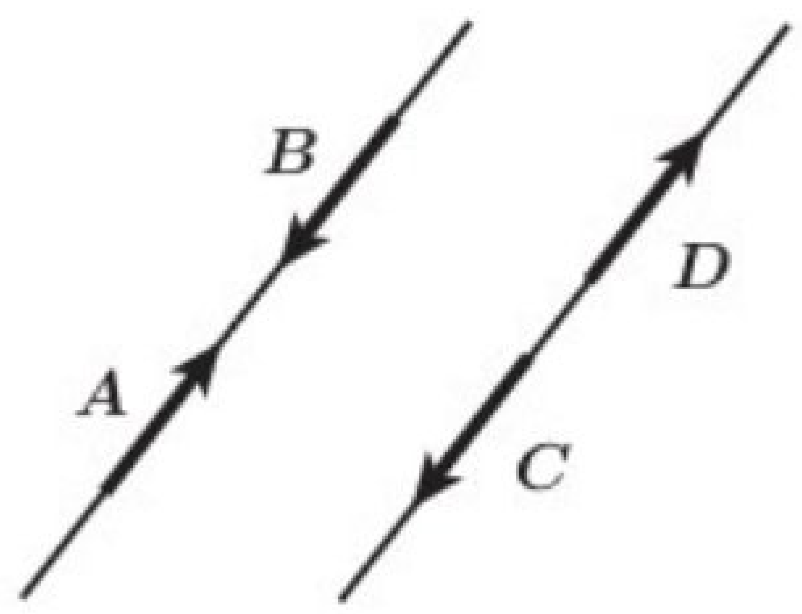
Esta guía de ejercicios que consta de 50 páginas y 47 problemas resueltos, se creó con la única finalidad de brindar una ayuda al estudiante durante el curso de su aprendizaje con la materia. Mucho de los problemas son prácticos y sirven para aclarar conceptos y resolver dudas, a lo largo de la lectura se notará que prácticamente todos los ejercicios se resuelven con ayuda de definiciones y propiedades físicas y matemáticas, ya que esta materia es el primer curso de física con el que tienen contacto los estudiantes, es por ello que es muy importante leer la teoría y estar claro de los conceptos, en caso contrario no se podrá desarrollar una base solida para los demás cursos.

Espero que esta guía ayude a cualquiera con interés de aprender el contenido, los ejercicios fueron tomamos de guías como Cayetano Di Bartolo, la guía del departamento de física, así como también del problemario del profesor Goosline Pereira. Quien cabe mencionar, que fue también el tutor de esta guía y quien con su ayuda durante las tutorías de sus cursos contribuyo con la supervisión del desarrollo.

CONTENIDO DETALLADO:

Ejercicio 1

La figura muestra cuatro vectores de la misma magnitud que se encuentran sobre dos rectas paralelas. Se puede afirmar que:

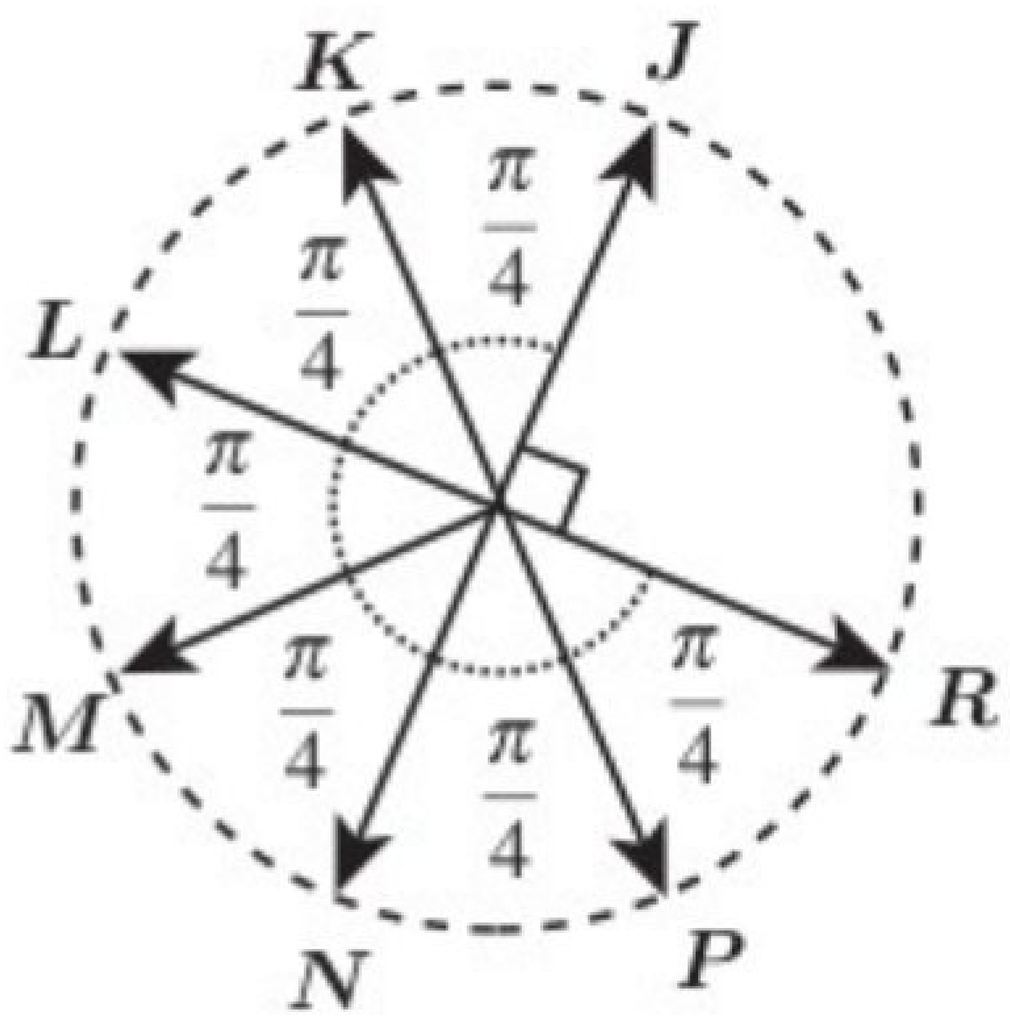


Resolución:

Concluimos que son colineales **A=D** y **B=C**; tenemos que la suma de los vectores de diferente sentido pero distinta magnitud es igual a cero, ya que se anularían por poseer sentidos opuestos, como es el caso: **A= -C → A+C = 0**

Ejercicio 2

Los 7 vectores de la figura unen el centro de una circunferencia con algún punto de la misma. La suma de los 7 vectores de la figura es igual a qué?



Definimos las magnitudes de los vectores como iguales entre todos, ya que se encuentra sobre una circunferencia, el cual es una figura geométrica que se caracteriza por poseer una serie de puntos que equidistan todos del centro una misma distancia, esta distan la conocemos el radio el cual es la magnitud de cada uno de los vectores:

$$|\vec{K}|=|\vec{J}|=|\vec{R}|=|\vec{P}|=|\vec{N}|=|\vec{M}|=|\vec{L}|=\frac{\pi}{4}$$

Podemos observar la colinealidad de los vectores y podemos concluir que:

$$\vec{K}=-\vec{P} \quad ; \quad \vec{J}=-\vec{N} \quad ; \quad \vec{R}=-\vec{L}$$

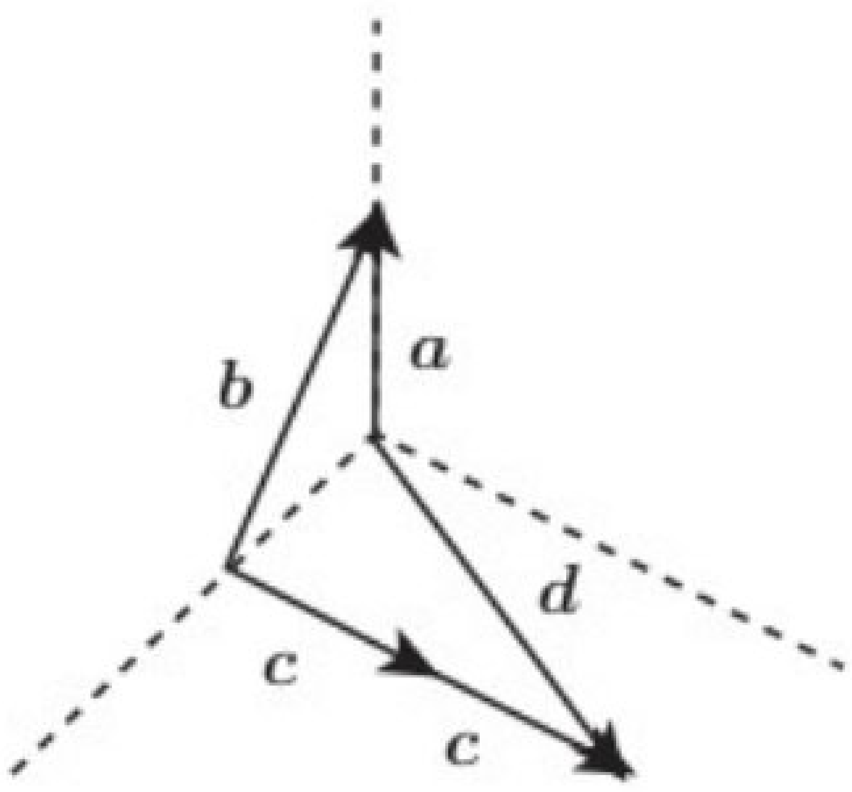
Por lo tanto, la suma de todos los vectores da como resultante al vector:

$$V_R=\vec{K}+\vec{J}+R+\vec{P}+\vec{N}+\vec{M}+\vec{L}=\vec{M}$$

El vector resultante será igual a **M**

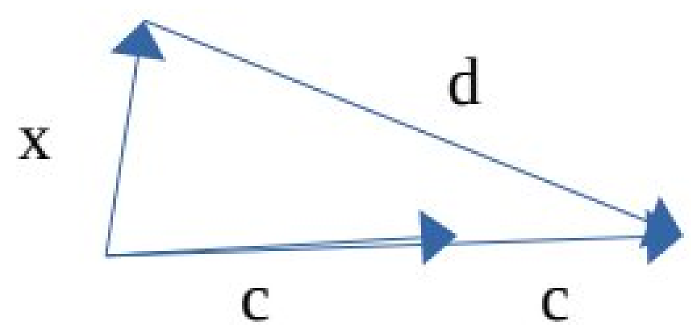
Ejercicio 3

Dados los vectores de la figura se cumple que



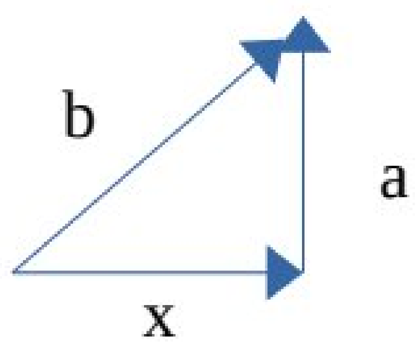
Resolución:

Visualizamos primero el plano que contiene a los vectores c y d, y denotamos su resultante como:



El nuevo vector x será la suma de: x = -d + c + c = -d + 2c

El nuevo plano en el que está el vector x y a dará como resultado al vector b



Entonces, finalmente concluimos que: b = x + a → b = -d + 2c + a

Ejercicio 4

Sean los vectores H = 5i + 2k y M = −4j + 3k, se cumple que 3H − 2M es igual a?

Resolución:

A partir de la expresión que se nos indica y siguiendo las reglas básicas de operación de vectores nos daría como resultado:

$$3H-2M=3(5i+2k)-2(-4j+3k)$$

$$\rightarrow 15i+6k+8j-6k=15i+8j$$

Conclusión, se cumple que 3H − 2M es igual a 15i + 8j

Ejercicio 5

Los vectores **a** y **b** satisfacen las ecuaciones:

2a − b = −i − 2j + 2k ,

−a + b = +i + j .

Se cumple entonces que el módulo de a es igual a?

Resolución:

Vamos a sumar las dos ecuaciones y nos dará como resultado:

2a − b = −i − 2j + 2k

−2a + 2b = +2i + 2j .

b = i + 2k

A partir de la segunda ecuación podemos despajar la variable a y así conocer su valor y nos daría:

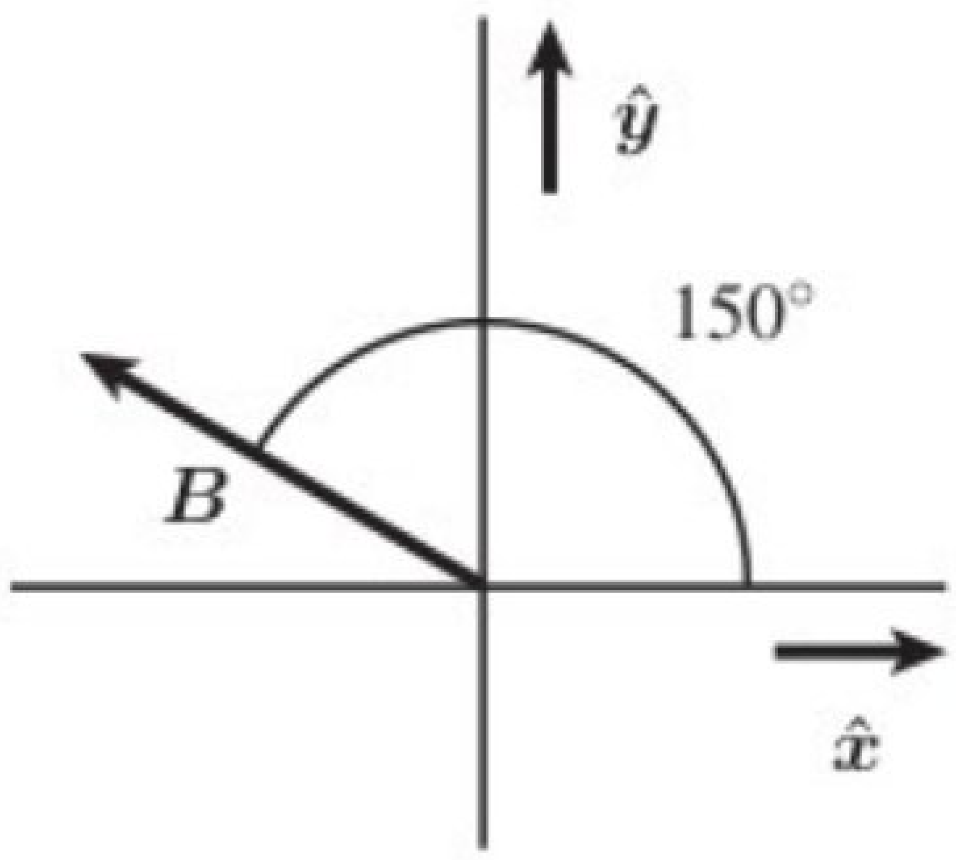
a = b - i – j = (i + 2k) – i – j = -j + 2k

Por definición, la norma o modulo de un vector se obtiene a partir de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes, tenemos que:

$$|a|=\sqrt{(0^2+(-1)^2+(2)^2)}=\sqrt{5}$$

Ejercicio 6

El vector B de la figura tiene un módulo de 60 cm/s. Su expresión en la base cartesiana y en unidades de m/s es?



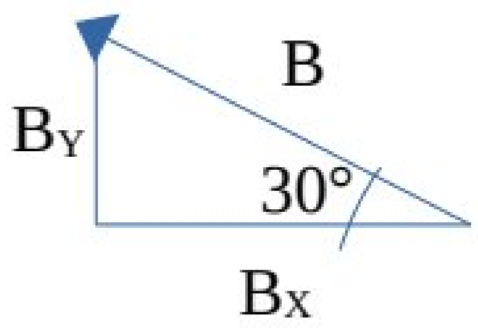
Resolución:

φ será definido como el ángulo que se forma entre el vector **B** y el eje x, y nos da como resultado:

$$\pi = \varphi + 150°$$

$$\varphi = \pi - 150°$$

$$\varphi = 30°$$



Para cada una de las componentes tenemos que:

$$\vec{B}_x = |\vec{B}|\cos(30°)(-\hat{x}) \quad ; \quad \vec{B}_y = |\vec{B}|\,sen(30°)(\hat{y})$$

Por el sistema MKS, el modulo de B es 0.6 m/s, por lo tanto los vectores quedarían:

$$\vec{B}_x = -0{,}6\cos(30°)\hat{x} \quad ; \quad \vec{B}_y = 0{,}6\,sen(30°)\hat{y}$$

Finalmente, el vector resultante en base cartesiana es la suma de las componentes x e y:

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = -0{,}6\cos(30°)\hat{x} + 0{,}6\,sen(30°)\hat{y} = -0{,}6\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + 0{,}6\frac{1}{2}\hat{y}$$

$$\vec{B} = (-0{,}3\sqrt{3}\,\hat{x} + 0{,}3\,\hat{y}) \quad \text{m/s}$$

Ejercicio 7

Sea G un vector de módulo 4, de componentes positivas y tal que forma el mismo ángulo con cada eje cartesiano (θ x = θ y = θ z). Se cumple entonces que?

Resolución:

Tenemos que el vector G es función de G(x,y,z), por lo tato su modulo puede ser hallado como:

$$|G|=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}=4 \rightarrow x^2+y^2+z^2=16$$

$$x=|G|\cos(\theta_x)=4\cos(\theta_x)$$

$$y=|G|\cos(\theta_y)=4\cos(\theta_y)$$

$$z=|G|\cos(\theta_z)=4\cos(\theta_z)$$

Gracias a los cosenos directores, concluimos que como la magnitud, el mismo ángulo θ con cada eje cartesiano es el mismo, concluimos que las componentes necesariamente tiene que ser iguales.

$$x = y = z = 4\cos\theta$$

Entonces, tenemos que el valor del ángulo θ será igual a:

$$x^2+y^2+z^2=16 \rightarrow (4\cos(\theta_x))^2+(4\cos(\theta_y))^2+(4\cos(\theta_z))^2=16$$

$$3(4\cos(\theta))^2=16 \rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Como el vector contiene componentes positivas usamos la raíz positiva. Finalmente, el vector G será

$$G(\hat{u}_x,\hat{u}_y,\hat{u}_z)$$

$$G=x\,\hat{u}_x+y\,\hat{u}_y+z\,\hat{u}_z=\left(4\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\hat{u}_x+\left(4\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\hat{u}_y+\left(4\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\hat{u}_z$$

$$G=\left(4\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(\hat{u}_x+\hat{u}_y+\hat{u}_z)$$

Ejercicio 8

El vector A tiene módulo 4, sus componentes x e y son del mismo tamaño pero opuestas, cumple con θ z = 30 ◦ y 0 < θ x < θ y donde θ x , θ y , θ z son los ángulos entre A y los semiejes positivos x, y, z respectivamente. El vector A es igual a:

Resolución:

El modulo de A es $|A|=4$, A_X = - A_y , sabiendo esto la componente A_z será de la siguiente manera:

$$A_z=|A|\cos(\theta_z)=4\cos(30°)=4\,\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

Para el caso de A_X y A_y tenemos lo siguiente:

$A_x=-A_y=rcos(\theta_x)$ donde r es la longitud del componente x e y

$$A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2=\|A\|$$

$$r^2+r^2+(2\sqrt{3})^2=4^2$$

$$r^2+r^2+(2\sqrt{3})^2=16 \rightarrow r^2=2 \rightarrow r=\sqrt{2}$$

Decimos que: $A_x=-A_y=\sqrt{2}\cos(\theta_x)$

Utilizando el hecho de que θ x < θ y y θ z = 30 ◦, decimos que θ x es cercano a 60° y θ y es cercano a 120°. En este caso, el componente x del valor de A es positivo y el componente y es negativo. Finamente la expresión del vector A como:

$$A=\sqrt{2}\hat{u}_x-\sqrt{2}\hat{u}_y+2\sqrt{3}\hat{u}_z$$

Ejercicio 9

Halle el vector **A** que tiene módulo 2 km/h y es paralelo al vector **D** = (4i + $\sqrt{3}$ j + 1k) cm.

Resolución:

Necesitamos encontrar al vector unitario en la dirección de **D** y luego multiplicarlo por el modulo de A (2km/h)

El módulo de **D**:

$$|D|=\sqrt{(4^2+(\sqrt{3})^2+1^2)}=\sqrt{20}\,cm=\frac{\sqrt{5}}{50}m$$

Por definición de un vector unitario, tendremos que en la dirección **D** es:

$$D_{unitario}=\frac{D}{|D|}=\frac{\frac{(4i+\sqrt{3}\,j+k)}{100}}{\frac{\sqrt{5}}{50}}=\frac{\sqrt{5}}{10}(4i+\sqrt{3}\,j+k)$$

Se multiplicó por un factor de 1/100 el vector **D** para convertir las unidades de cm a m.

El vector **A** será, convirtiendo el modulo de (2 km/h) a (5/9 m/s):

$$A=|A|D_{unitario}=\frac{5}{9}\cdot\left[\frac{\sqrt{5}}{10}(4i+\sqrt{3}\,j+k)\right]=\frac{\sqrt{5}}{18}(4i+\sqrt{3}\,j+k)\quad \text{m/s}$$

$$A=\frac{\sqrt{5}}{18}(4i+\sqrt{3}\,j+k)\quad \text{m/s}$$

Ejercicio 10

Sean los vectores a = ai, b = bj y c = ck; las cantidades a, b y c se asumen conocidas.

Considere el triángulo T cuyos tres vértices están en los puntos r 1 = a + c (vértice 1), r 2 = a + b (vértice 2) y r 3 = b + c (vértice 3).

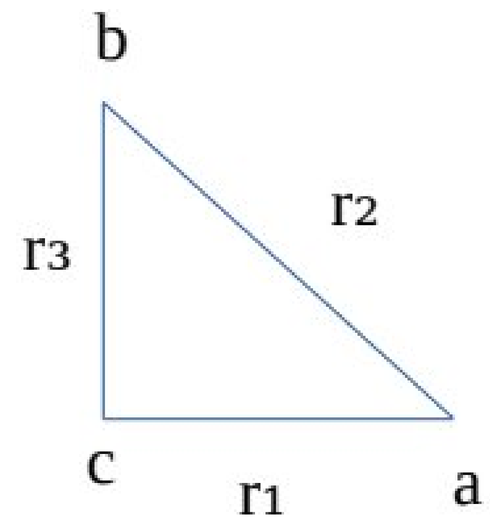
a. Determine los tres vectores que unen los tres vértices de T: L 1 apunta del primero al segundo, L 2 del segundo al tercero y L 3 del tercero al primero.

b. Halle un vector normal al plano del triángulo T y encuentre la proyección de este vector sobre el eje z.

c. Calcule el área del triángulo T.

Resolución:

a. Los vectores que unen los vértices del triángulo T son:



$$L_1 = r_2 - r_1 = (a+b) - (a+c) = b - c$$

$$L_2 = r_3 - r_2 = (b+c) - (a+b) = c - a$$

$$L_3 = r_1 - r_3 = (a+c) - (b+c) = a - b$$

$$L_1 = b\,\hat{j} - c\,\hat{k}$$

$$L_2 = c\,\hat{k} - a\,\hat{i}$$

$$L_3 = a\,\hat{i} - b\,\hat{j}$$

b. Un vector normal al plano del triángulo T es el producto vectorial de dos de los vectores que unen los vértices, por ejemplo, L_1 y L_2:

$$\vec{N} = L_1 \times L_2 = (b\,\hat{j} - c\,\hat{k}) \times (c\,\hat{k} - a\,\hat{i}) = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & b & -c \\ -a & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = bc\,\hat{i} + ac\,\hat{j} + ab\,\hat{k}$$

Como necesitamos encontrar la proyección de este vector sobre el eje Z, solo necesitamos considerar la componente k del vector normal.

$$Proy(\vec{N}) = \vec{N} \cdot \hat{k} = (bc\,\hat{i} + ac\,\hat{j} + ab\,\hat{k}) \cdot \hat{k} = ab$$

c. El área del triángulo T se puede calcular utilizando la fórmula:

$$Área = \frac{1}{2} |\vec{N}|$$

Donde N es la magnitud del vector normal al plano del triángulo. La magnitud se puede calcular como:

$$A = \frac{1}{2} |L_1 \times L_2| = \frac{1}{2} \sqrt{((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2)}$$

Ejercicio 11

Demuestre que si **A**, **B** y **C** son vectores que dependen de t entonces:

a) $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d}{dt}(\vec{A}).\vec{B} + A.\frac{d}{dt}(\vec{B})$

b) Si ||**C**|| = constante y $\dot{\vec{C}} \neq 0$ entonces **C** y $\dot{\vec{C}}$ son ortogonales.

Resolución:

a) Definición de producto escalar:

$$\vec{A}.\vec{B}=\vec{A}_1.\vec{B}_1+\vec{A}_2.\vec{B}_2+...+\vec{A}_n.\vec{B}_n$$

Donde $\vec{A}=(\vec{A}_1,\vec{A}_2,...,\vec{A}_n)$ y $\vec{B}=(\vec{B}_1,\vec{B}_2,...,\vec{B}_n)$ son vectores en R^n. Derivando ambos lados respecto de t, tenemos que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B})=\frac{d}{dt}(\vec{A}_1.\vec{B}_1+\vec{A}_2.\vec{B}_2+...+\vec{A}_n.\vec{B}_n)$$

Usando la regla de la cadena y el producto, reescribimos

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B})=\frac{d}{dt}(\vec{A}_1)\vec{B}_1+\vec{A}_1\frac{d}{dt}(\vec{B}_1)+\frac{d}{dt}(\vec{A}_2)\vec{B}_2+\vec{A}_2\frac{d}{dt}(\vec{B}_2)+...+\frac{d}{dt}(\vec{A}_n)\vec{B}_n+\vec{A}_n\frac{d}{dt}(\vec{B}_n)$$

Reordenamos los términos

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B})=\left(\frac{d}{dt}(\vec{A}_1)\vec{B}_1+\frac{d}{dt}(\vec{A}_2)\vec{B}_2+...+\frac{d}{dt}(\vec{A}_n)\vec{B}_n\right)+\left(\vec{A}_1\frac{d}{dt}(\vec{B}_1)+\vec{A}_2\frac{d}{dt}(\vec{B}_2)+...+\vec{A}_n\frac{d}{dt}(\vec{B}_n)\right)$$

Esto es igual a:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B})=\frac{d}{dt}(\vec{A}).\vec{B}+A.\frac{d}{dt}(\vec{B})$$

b) La norma de un vector **C** se define como

$$\|\vec{C}\|=\sqrt{\vec{C}.\vec{C}}$$

Si ||**C**|| = constante, entonces

$$\frac{d}{dt}(\|\vec{C}\|)=0$$

Derivando ambos lados respecto a t, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\vec{C}.\vec{C}}\right)=0$$

Usando la regla de la cadena, reescribimos

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\vec{C}.\vec{C}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\vec{C}.\vec{C}}}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{C}.\vec{C})=0$$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(\vec{C}.\vec{C})=0$$

Usando la regla del producto que usamos en el ítem anterior, podemos reescribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{C}.\vec{C})=\frac{d}{dt}(\vec{C}).\vec{C}+\vec{C}\frac{d}{dt}(\vec{C})=0$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{C}).\vec{C}=-\vec{C}\frac{d}{dt}(\vec{C})$$

Producto escalar de ambos lados

$$(\vec{C}.\vec{C})\frac{d}{dt}(\vec{C})=-\vec{C}.\left(\vec{C}.\frac{d}{dt}(\vec{C})\right)$$

Usando la definición de norma de un vector

$$\|\vec{C}\|^2\frac{d}{dt}(\vec{C})=-\vec{C}.\left(\vec{C}.\frac{d}{dt}(\vec{C})\right)$$

Si $\dot{\vec{C}}\neq 0$ entonces podemos dividir ambos lados por $\|\mathbf{C}\|^2$

$$\frac{d}{dt}(\vec{C})=\frac{-\vec{C}.\left(\vec{C}.\frac{d}{dt}(\vec{C})\right)}{\|\vec{C}\|^2}$$

Esto implica que $\frac{d}{dt}(\vec{C})$ y **C** son ortogonales, para comprobar esto hacemos:

$$\frac{d}{dt}(\vec{C}).\vec{C}=\left(\frac{-\vec{C}.\left(\vec{C}.\frac{d}{dt}(\vec{C})\right)}{\|\vec{C}\|^2}\right).\vec{C}$$

Propiedad distributiva del producto escalar

$$\frac{d}{dt}(\vec{C}).\vec{C}=\frac{\left(-\vec{C}.\left(\frac{d}{dt}(\vec{C})\right)\right)\times\vec{C}.\vec{C}}{\|\vec{C}\|^2}=\frac{\left(-\vec{C}.\left(\frac{d}{dt}(\vec{C})\right)\right)\times\|\vec{C}\|^2}{\|\vec{C}\|^2}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{C}).\vec{C}=-\vec{C}.\frac{d}{dt}(\vec{C})$$

La derivada de **C** con respecto a t es perpendicular a **C**, la velocidad de **C** es perpendicular a la dirección **C**.

Ejercicio 12

Seleccione la expresión falsa

a) $\|\vec{A}-\vec{B}\|=\sqrt{\vec{A}.\vec{A}-2\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{B}}$

b) $|\vec{A}\times\vec{B}|\leqslant\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|$

c) $\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})\neq 0$

d) $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

Resolución:

a) Es una forma de expresar la distancia entre dos vectores.

b) Es una forma de expresar la desigualdad triangular para el producto cruzado de dos vectores.

d) Es una propiedad fundamental del producto cruzado de dos vectores.

c) De hecho, $\vec{A}.(\vec{A}\times\vec{B})=0$, ya que el producto escalar de un vector con el producto cruzado de ese vector con otro es siempre cero. Esto se debe a que el producto cruzado de $\vec{A}\times\vec{B}$ es perpendicular a **A** y a **B**, por lo que el escalar de **A** con $\vec{A}\times\vec{B}$ es cero.

Respuesta definitiva, opción (c).

Ejercicio 13

Considere una partícula de masa M = 1 kg con vector posición en función del tiempo dado por

$$r(t) = i \text{ m} + 3tj \text{ m/s} - 4t^2 k \text{ m/s}^2$$

donde t es el tiempo, m indica metros y s segundos.

a. Los vectores velocidad y aceleración de la partícula se definen por v = dr/dt y a = dv/dt respectivamente. Halle los vectores r, v y a al instante t = (1/2) s.

b. La fuerza neta F sobre una partícula satisface la ecuación F = Ma y la potencia de una fuerza se define por P = F · v. También definiremos la energía cinética de la partícula como $T \equiv M|v|^2/2$ y su momento angular por L = Mr × v.

Halle para el instante t = (1/2) s la potencia de la fuerza neta, la energía cinética de la partícula y su momento angular.

Resolución:

a) Siempre debemos encontrar las derivadas de r(t) con respecto de t claramente.

La derivada primera de de r(t) es:

$$v(t)=\frac{dr(t)}{dt}=(0)\hat{i}+3\hat{j}-8t\hat{k}$$

La derivada segunda de r(t) es:

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2r(t)}{dt^2}=(0)\hat{i}+(0)\hat{j}-8\hat{k}$$

Ahora podemos evaluar estos vectores en el instante t = 1/2s

$$r\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\hat{i}+3\left(\frac{1}{2}\right)\hat{j}-4\left(\frac{1}{2}\right)^2\hat{k}\right)=\left(\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-\hat{k}\right) \quad [\text{m}]$$

$$v\left(\frac{1}{2}\right)=\left((0)\hat{i}+(3)\hat{j}-8\left(\frac{1}{2}\right)\hat{k}\right)=\left(3\hat{j}-4\hat{k}\right) \quad [\text{m/s}]$$

$$a\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-8\hat{k}\right) \quad [\text{m/s}^2]$$

b) Al igual que hicimos en la primera pregunta, aquí vamos a evaluar las expresiones dadas y realizar sus respectivas operaciones vectoriales, tenemos que:

$$\vec{F}=m\vec{a} \quad \text{como } M = 1 \text{ kg}$$

$$\vec{F}=\vec{a}=0\hat{i}+0\hat{j}-8\hat{k} \quad [\text{N}]$$

Para el siguiente vamos a tener un producto punto, lo que tendríamos:

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=(0\hat{i}+0\hat{j}-8\hat{k})\cdot(3\hat{j}-4\hat{k})=0+0+32=32 \quad [\text{J/s}]$$

Continuando con la siguiente expresión nos quedaría:

$$T=\frac{1}{2}M|v|^2$$

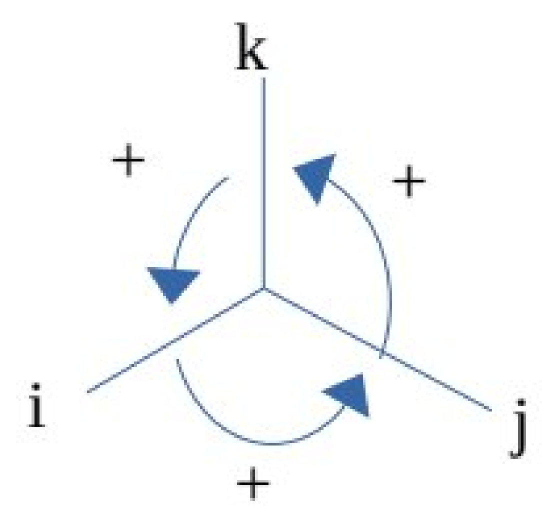
El modulo de un vector se define como: $|v|=\sqrt{(0)^2+(3)^2+(-4)^2}=5$

$$T=\frac{1}{2}(1)(5)^2=\frac{25}{2} \quad [\text{J}]$$

Finalmente, la última expresión sería:

$$L=M\vec{r}\times\vec{v}=(1)\left[\left(\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-\hat{k}\right)\times(3\hat{j}-4\hat{k})\right]$$

Recordando la regla nemotecnia de producto cruz de vectores:



Tenemos que:

$$L=M\vec{r}\times\vec{v}=(3\hat{k}+4\hat{j}-6\hat{i}+3\hat{i})=-3\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k} \quad [\text{kg m}^2/\text{s}]$$

$$|L|=\sqrt{(-3)^2+4^2+3^2}=\sqrt{34} \quad [\text{kg m}^2/\text{s}]$$

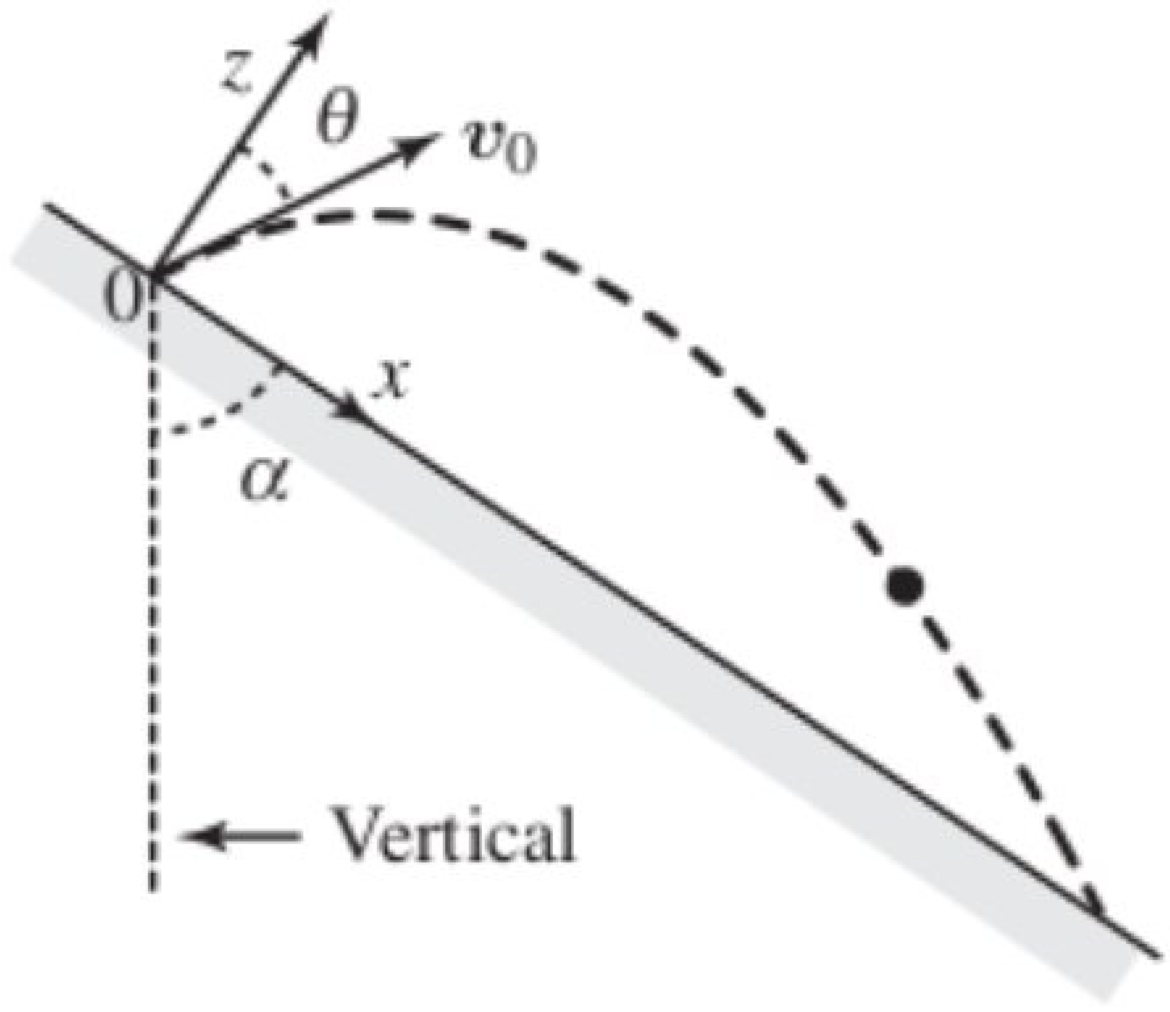
Ejercicio 14

La figura muestra una colina inclinada un ángulo α respecto a la vertical y la trayectoria de un proyectil. El proyectil se lanza desde el origen 0 con una velocidad inicial v_0 de módulo v_0 y que forma un ángulo θ con el eje z (perpendicular al plano). El eje x se toma tangente al plano apuntando hacia abajo.

a. Tome el sistema de referencia indicado en la figura y halle las componentes de los vectores aceleración, velocidad y posición del proyectil en función del tiempo.

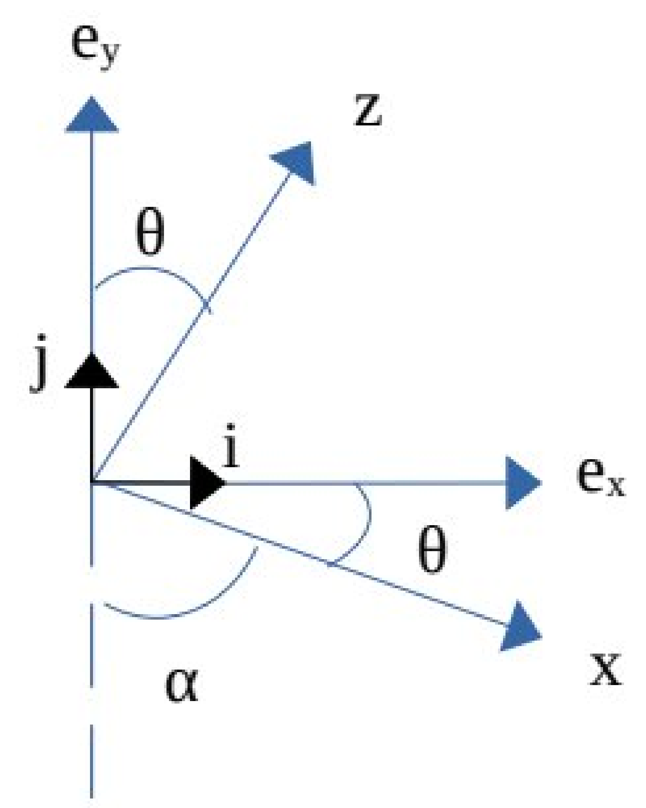
b. Halle la máxima separación entre el proyectil y la colina.

c. Halle la distancia entre el origen y el punto de caída del proyectil sobre la colina. Demuestre que esa distancia es máxima si θ = α /2.



Resolución:

El nuevo sistema de referencia viene dibujado como:



Ahora procedemos hacer el cambio de base para z y x:

$$z = sen\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$$x = sen\,\alpha\,\hat{i} - \cos\alpha\,\hat{j}$$

$$\hat{j} = -\cos\alpha\,\hat{x} + sen\,\alpha\,\hat{z}$$

$$\vec{g} = -g\,\hat{j} = -g(-\cos\alpha\,\hat{x} + sen\,\alpha\,\hat{z})$$

Tenemos las condiciones iniciales:

$$\vec{r}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_0 = v_0(sen\,\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{z})$$

A partir de esto podemos escribir las componentes en función de la nueva base.

Posición:

$$\vec{r}(t)=\vec{v}_0 t-\frac{1}{2}g t^2=v_0(sen\,\theta\hat{x}+\cos\,\theta\hat{z})t-\frac{1}{2}g(-\cos\alpha\hat{x}+sen\,\alpha\hat{z})t^2$$

$$\vec{r}(t)=(v_0 sen\,\theta t+\frac{1}{2}g\cos\alpha t^2)\hat{x}-(v_0\cos\theta t-\frac{1}{2}gsen\,\alpha t^2)\hat{z}$$

Ahora separando por componentes tenemos lo siguiente:

$$x=v_0 sen\,\theta t+\frac{1}{2}g\cos\alpha t^2 \quad , \quad z=v_0\cos\theta t-\frac{1}{2}g\,sen\,\alpha t^2$$

$$\dot{x}=v_0 sen\,\theta+g\cos\alpha t \quad , \quad \dot{z}=v_0\cos\theta-g\,sen\,\alpha t$$

$$\ddot{x}=g\cos\alpha \quad , \quad \ddot{z}=-g\,sen\,\alpha$$

b) La máxima separación ocurre para (z punto = 0)

$$\dot{z}=v_0\cos\theta-g\,sen\,\alpha t'=0$$

El nuevo t' será la variable con la que trabajaremos para hallar la máxima separación en función de ese tiempo. Por lo tanto, despejando t' tenemos:

$$t'=\frac{v_0\cos\theta}{g\,sen\,\alpha}$$

Ahora bien, vamos a sustituir ésta expresión en la ecuación de posición en z, y nos queda:

$$z=v_0\cos\theta\left(\frac{v_0\cos\theta}{g\,sen\,\alpha}\right)-\frac{1}{2}g\,sen\,\alpha\left(\frac{v_0\cos\theta}{g\,sen\,\alpha}\right)^2$$

$$z=\frac{v_0{}^2\cos\theta^2}{g\,sen\,\alpha}-\frac{1}{2}\frac{v_0{}^2\cos\theta^2}{g\,sen\,\alpha}=\frac{v_0{}^2\cos\theta^2}{gsen\,\alpha}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{v_0{}^2\cos\theta^2}{2\,gsen\,\alpha}$$

La máxima separación ocurre para esa expresión que acabamos de hallar.

c) Para un t' = t, vamos a tener lo siguiente:

$$\vec{r}(t=t')=D\,\hat{x}+D\,\hat{z}$$

$$\hat{x}:D=v_0 sen\,\theta t'+\frac{1}{2}g\cos\alpha t'^2$$

$$\hat{z}:0=v_0\cos\theta t'-\frac{1}{2}gsen\,\alpha t'^2$$

De z despejamos t'

$$t'(v_0\cos\theta-\frac{1}{2}gsen\,\alpha t')=0$$

Existen dos posibles valores para t' que satisfagan la expresión:

$$t'=0 \vee v_0 \cos\theta - \frac{1}{2} g\, sen\, \alpha t'=0$$

$$t'=\frac{2 v_0 \cos\theta}{g\, sen\, \alpha}$$

Como t'=0 no puede ser, la única correcta será la segunda. Por lo tanto, vamos a sustituir ésta expresión en x para hallar la distancia D recorrida.

$$D=v_0\, sen\,\theta \left(\frac{2 v_0 \cos\theta}{g\, sen\,\alpha}\right)+\frac{1}{2} g \cos\alpha \left(\frac{2 v_0 \cos\theta}{g\, sen\,\alpha}\right)^2$$

$$D=\frac{2 {v_0}^2 \cos\theta}{g\, sen\,\alpha}(sen\,\theta + tg\,\alpha \cos\theta)$$

Debido a D = D(θ)

$$\frac{dD(\theta)}{d\theta}=\frac{2 {v_0}^2}{g}\frac{1}{sen\,\alpha}[-sen\,\theta(sen\,\theta+tg\,\alpha\cos\theta)+\cos\theta(\cos\theta - tg\,\alpha\, sen\,\theta)]=0$$

Condición de = 0

El punto de caída ocurre para z= 0

$$-sen\,\theta(sen\,\theta+tg\,\alpha\cos\theta)+\cos\theta(\cos\theta-tg\,\alpha\, sen\,\theta)=0$$

$$\cos(2\theta)-2tg\,\alpha\cos\theta\, sen\,\theta=0$$

$$\cos(2\theta)=sen(2\theta)tg\,\alpha$$

$$tg(2\theta)=\frac{1}{tg\,\alpha} \quad \text{Para } \theta \in (0, \pi/2)$$

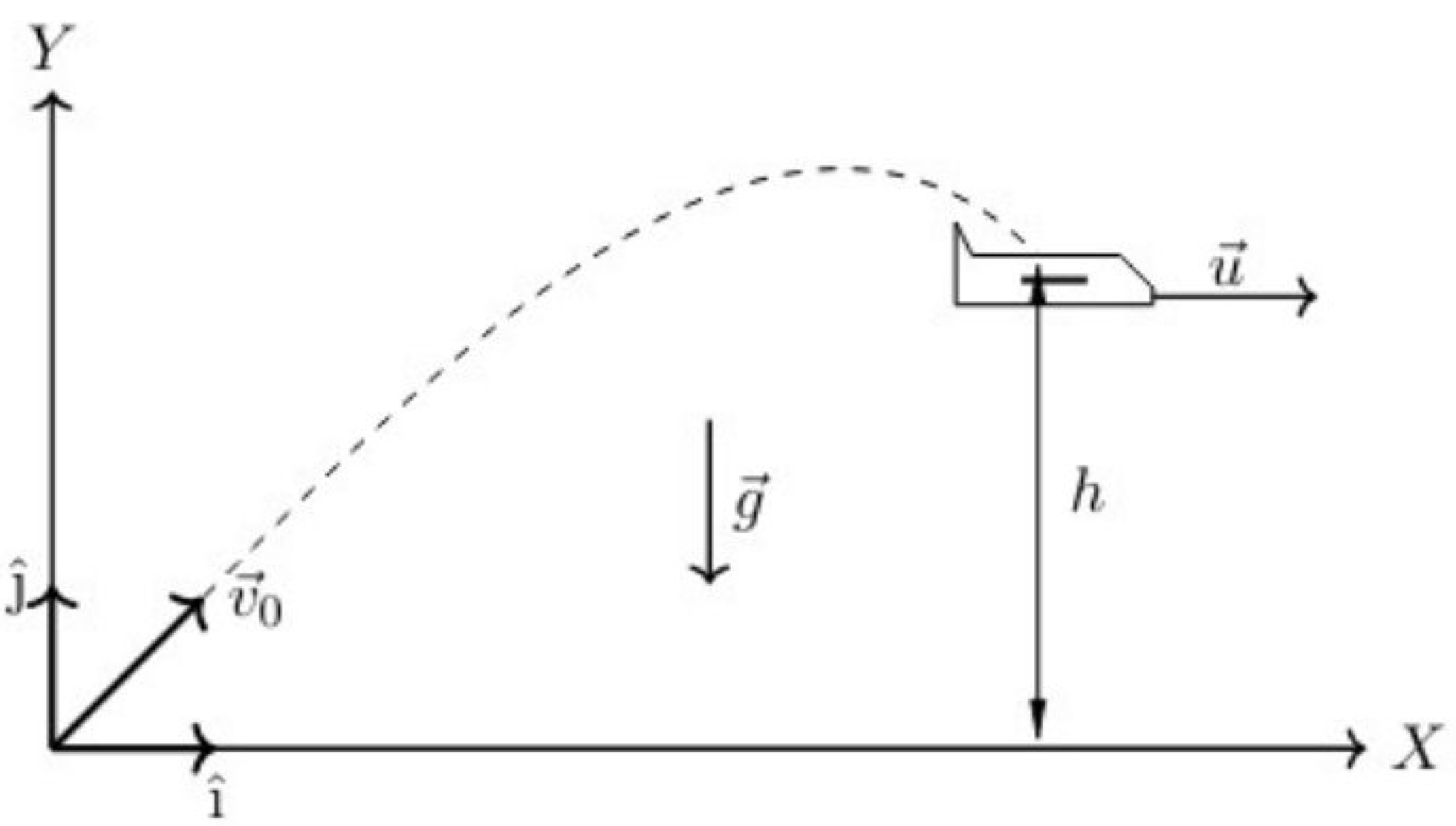
$$2\theta=arc\tan\left(\frac{1}{tg\,\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}$$

Finalmente, se demuestra que:

$$\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Ejercicio 15

Una avioneta que transporta droga es detectada por las autoridades y deciden derrumbarla usando un proyectil disparado desde el nivel del suelo. El proyectil es lanzado con una velocidad $v_0 = (30\hat{\imath} + 50\hat{\jmath})$ impactando sobre la avioneta a una altura h = 120m en su trayecto de descenso, tal como se muestra en la figura. La avioneta presenta un movimiento uniforme con velocidad desconocida u, pasando sobre el punto de lanzamiento dos segundos después de que se realizó el disparo:



a) Calcule el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar al avión.

b) Obtenga la rapidez |u| que tiene la avioneta para que ésta sea alcanzada por el proyectil.

c) Determine los vectores posición (respecto al origen O) y velocidad del proyectil justo en el momento en que éste se adquiere la misma altura de la avioneta en su viaje de ascenso.

Resolución:

a) Condiciones iniciales:

Para el caso del Avión

$$\vec{a}=0$$

$$\vec{v}=v_0\bar{u}=ctte$$

$$\vec{r_0}=(0,h)$$

Para el caso del Proyectil

$$\vec{r_0}=(0,0)=\vec{0}$$

$$\vec{v_0}=v_0(\cos\theta\hat{i}+sen\,\theta\hat{j})=(30+\hat{5}0\,\hat{j})$$

$$\vec{a}=\vec{g}=-g\,\hat{j}$$

A partir de la expresión de la posición, tenemos:

$$\vec{r}\,(t)=\vec{r_0}+v_0(\cos\theta\hat{i}+sen\,\theta\hat{j})t-\frac{1}{2}g\,t^2$$

$$\vec{r}\,(t)=0+(30\,\hat{i}+50\,\hat{j})-\frac{1}{2}g\,t^2\,\hat{j}$$

Como queremos enfocarnos solamente en el eje vertical, haremos una proyección en j

$$(0{,}120)\cdot j=\left[0+(30\,\hat{i}+50\,\hat{j})t-\frac{1}{2}g\,t^2\,\hat{j}\right]\cdot j$$

$$120=50\,t-\frac{1}{2}g\,t^2$$

$$5\,t^2-50\,t+120=0$$

Esta ecuación cuadrática, se resuelve fácilmente aplicando la resolvente y tenemos los dos valores:

$$t_{1,2}=\frac{50\pm\sqrt{(-50)^2-4(5)(120)}}{2(5)}=\frac{50\pm10}{10}$$

$$t_1=4\,s\vee t_2=6\,s$$

Como impacta en la trayectoria de descenso el tiempo debe ser t = 6s.

b) Pasa por el origen en t=2s, por lo que su posición a los 6 segundos será:

$$x=vt=|\vec{u}|(6-2)=4|\vec{u}|$$

El proyectil alcanza al avión en:

$$x=\vec{v}_0\cdot t\,\hat{i}=30(6)=180\,m$$

Igualamos ambas expresiones:

$$180=4|\vec{u}|$$

Finalmente, si despejamos u tenemos:

$$|\vec{u}|=\frac{180}{4}=45\,m/s$$

c) Tenemos lo siguiente:

$$\vec{r}\,(t)=\vec{r}_0+v_0(\cos\theta\hat{i}+sen\,\theta\hat{j})(t=6\,s)-\frac{1}{2}g(t=6\,s)^2$$

$$\vec{r}\,(t)=0+(30\,\hat{i}+50\,\hat{j})(4)-\frac{1}{2}(10)(4)^2\,\hat{j}$$

$$\vec{r}\,(t)=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}=(120\,\hat{i}+120\,\hat{j})\,m$$

Ahora la velocidad:

$$\vec{v}\,(t)=\frac{dr(t)}{dt}=v_0(\cos\theta\hat{i}+sen\,\theta\hat{j})-g\,t\,\hat{j}$$

$$\vec{v}\,(t=4\,s)=(30\,\hat{i}+50\,\hat{j})-10(4)\,\hat{j}$$

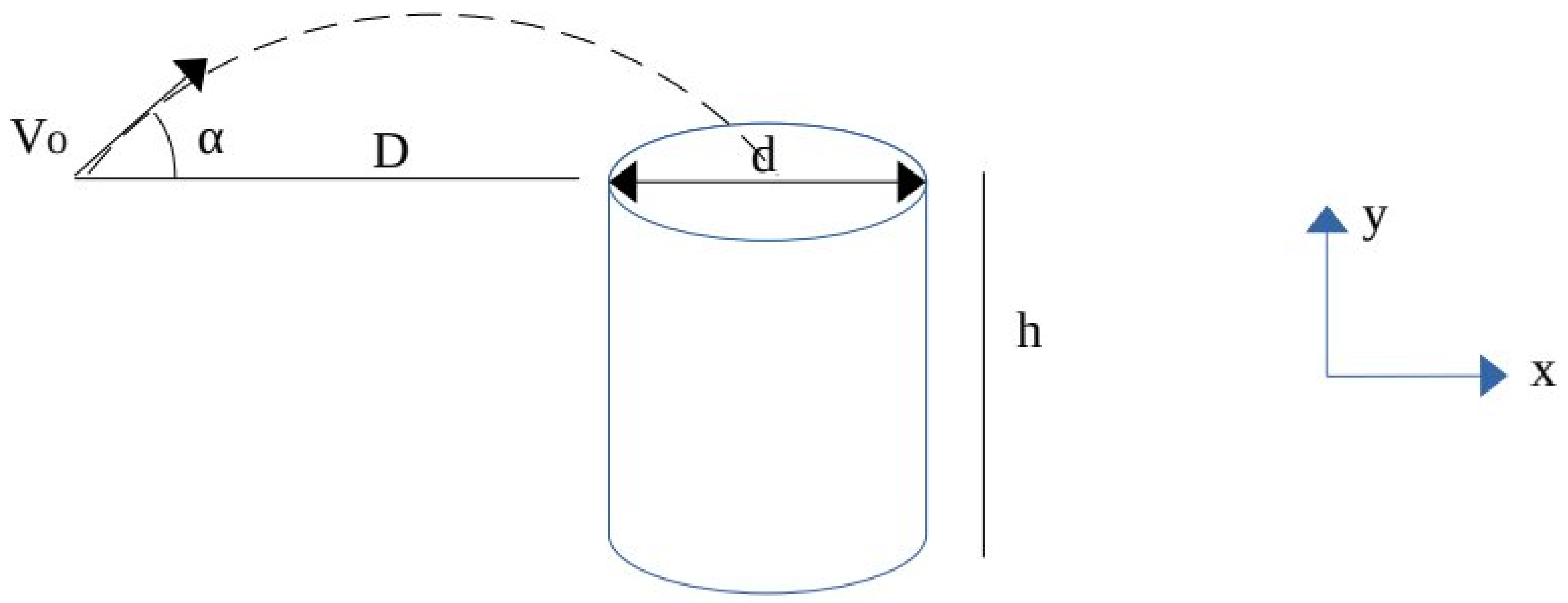
$$\vec{v}\,(t=4\,s)=(30\,\hat{i}+10\,\hat{j})\,m/s$$

Ejercicio 16

Después de terminar toda la carrera universitaria, un chico de malos hábitos decide tirar todas sus notas a un bote de basura cilíndrico de altura h y diámetro d. Como si eso fuera poco, decide encenderle fuego al bote lanzando una cerilla al ras (a la misma altura que el fondo del bote) del bote ubicado a una distancia D del chico. Si el ángulo de lanzamiento de la cerilla es α, ¿Cuáles son los valores de la rapidez inicial v_0 de la cerilla que garantizan que entre en el bote y encienda fuego todas sus notas?

Resolución:

Para visualizar lo que está ocurriendo, esquema del problema es el siguiente:



Tenemos las siguientes condiciones iniciales:

$$\vec{a}=\vec{g}=-g\,\hat{j}$$

$$\vec{v_0}=v_0(\cos\alpha\,\hat{i}+sen\,\alpha\,\hat{j})$$

$$\vec{r_0}=(0,0)=\bar{0}$$

A partir de aquí, empleando la expresión de posición tenemos lo siguiente:

$$\vec{r}(t)=\vec{r_0}+v_0(\cos\alpha\,\hat{i}+sen\,\alpha\,\hat{j})t-\frac{1}{2}g\,t^2\,\hat{j}$$

Dividiendo en sus dos componentes nos queda:

$$\hat{i}:x(t)=r_{0x}+v_{0x}t=v_0\cos\alpha\,t$$

$$\hat{j}:y(t)=r_{0y}+v_{0y}t-\frac{1}{2}g\,t^2=v_0\,sen\,\alpha\,t-\frac{1}{2}g\,t^2$$

Para el tiempo en alcanzar la distancia D, igualamos la posición en x igual a D:

$$x=D\rightarrow v=\frac{x}{t}\rightarrow t=\frac{D}{v_0\cos\alpha}$$

Condiciones en altura en x = D:

$$y(t=D)=v_0\,sen\,\alpha\left(\frac{D}{v_0\cos\alpha}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{D}{v_0\cos\alpha}\right)^2$$

$$y(t=D)=D\cdot tg\,\alpha-\frac{g\,D^2}{2\,v_0{}^2\cos^2\alpha}$$

Para que la cerilla entre en el bote, su altura debe estar entre 0 y h:

$$0\leqslant y(t=D)\leqslant h$$

$$0\leqslant D\cdot tg\,\alpha-\frac{g\,D^2}{2\,v_0{}^2\cos^2\alpha}\leqslant h$$

Debemos encontrar los valores de v_0 que satisfacen la desigualdad:

$$0\leqslant D\cdot tg\,\alpha-\frac{g\,D^2}{2\,v_0{}^2\cos^2\alpha}\quad \text{y}\quad D\cdot tg\,\alpha-\frac{g\,D^2}{2\,v_0{}^2\cos^2\alpha}\leqslant h$$

Condición inferior:

Despejamos v_0

$$D\cdot tg\,\alpha-\frac{g\,D^2}{2\,v_0{}^2\cos^2\alpha}\geqslant 0 \rightarrow D\cdot tg\,\alpha\geqslant\frac{g\,D^2}{2\,v_0{}^2\cos^2\alpha}$$

$$v_0{}^2\geqslant\frac{gD^2}{2\,D\cdot\cos^2\alpha\cdot tg\,\alpha}\rightarrow v_{0^2}\geqslant\frac{gD}{2\cdot\cos^2\alpha\cdot tg\,\alpha}$$

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{gD}{2\cdot\cos^2\alpha\cdot tg\,\alpha}}$$

Condición superior:

Despejamos v_0

$$D\cdot tg\,\alpha-\frac{g\,D^2}{2\,v_0{}^2\cos^2\alpha}\leqslant h\rightarrow\frac{g\,D^2}{2\,v_0{}^2\cos^2\alpha}\geqslant D\cdot tg\,\alpha-h$$

$$v_0{}^2\geqslant\frac{gD^2}{2\cos^2\alpha(D\cdot tg\,\alpha-h)}$$

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{gD^2}{2\cos^2\alpha(D\cdot tg\,\alpha-h)}}$$

Rango de v_0

$$\sqrt{\frac{gD}{2\cdot\cos^2\alpha\cdot tg\,\alpha}}\leqslant v_0\leqslant\sqrt{\frac{gD^2}{2\cos^2\alpha(D\cdot tg\,\alpha-h)}}$$

En la condición superior se cumple siempre y cuando que $D\cdot tg\alpha > 0$

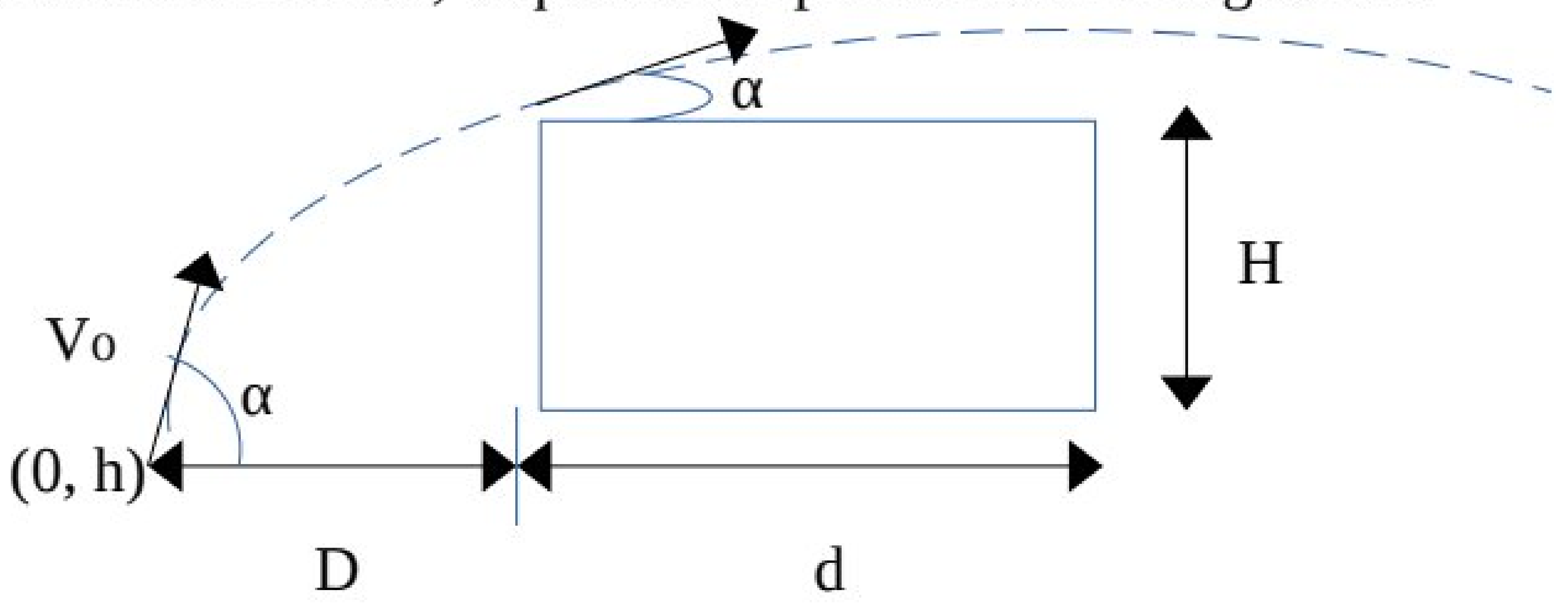
Así finalmente, los valores de la rapidez inicial v_0 de la cerilla que garantizan que entre en el bote y encienda fuego todas sus notas, son los rangos de topes de condición inferior y superior que establecimos.

Ejercicio 17

Un bateador le pega a una pelota que le lanzan a una altura h del suelo y con un ángulo α respecto a la horizontal. Si nada estorbara en el paso de la pelota, ésta tendría un alcance D, sin embargo, a una distancia horizontal d hay una cerca de altura H. ¿Qué condiciones debe cumplir la rapidez de la bola para que pase la cerca (y sea un home run)?

Resolución:

Para visualizar lo que está ocurriendo, esquema del problema es el siguiente:



Tenemos las siguientes condiciones iniciales:

$$\vec{v_{0x}} = v_0 \cos\alpha\,\hat{i}$$

$$\vec{v_{0y}} = v_0\, sen\,\alpha\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\hat{j}$$

$$\vec{r_0} = (0, h)$$

A partir de aquí, empleando la expresión de cinemática para la posición tenemos lo siguiente:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + v_0(\cos\alpha\,\hat{i} + sen\,\alpha\,\hat{j})t - \frac{1}{2}g t^2 \hat{j}$$

Dividiendo en sus componentes horizontales y verticales tenemos las siguientes expresiones:

$$\hat{i}: x(t) = r_{0x} + v_{0x} t = v_0 \cos\alpha t$$

$$\hat{j}: y(t) = r_{0y} + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = h + v_0\, sen\,\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ahora, podemos hacer tiempo en alcanzar la distancia d

$$x = d \rightarrow t = \frac{d}{v_o \cos\alpha}$$

Ahora lo mismo, pero para la componente y:

$$y(t=d) = h + v_0\, sen\,\alpha \left(\frac{d}{v_o \cos\alpha}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_o \cos\alpha}\right)^2$$

$$y(t=d) = h + d \cdot tg\,\alpha - \frac{g d^2}{2 v_0{}^2 \cos^2\alpha}$$

Para que la pelota pase cerca, debe cumplirse la siguiente desigualdad:

$$y(t=d) \geqslant H$$

$$h+d\cdot tg\,\alpha-\frac{g d^2}{2 v_0{}^2 \cos^2\alpha}\geqslant H$$

Ahora buscamos las condiciones sobre v_0

$$\frac{g d^2}{2 v_0{}^2 \cos^2\alpha}\leqslant h+d\cdot tg\,\alpha-H \rightarrow v_0{}^2\geqslant\frac{g d^2}{2\cos^2\alpha(h+d\cdot tg\,\alpha-H)}$$

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{g d^2}{2\cos^2\alpha(h+d\cdot tg\,\alpha-H)}}$$

Para que la condición se cumpla debe pasar que siempre y cuando que

$$(h + d\cdot tg\alpha - H) > 0 \rightarrow (h + d\cdot tg\alpha) > H$$

Así que finalmente, los valores de la rapidez inicial v_0 de la pelota que garantizan un Home-run, son los valores igual o mayores que los presentados anteriormente en la desigualdad. Para garantizador que la pelota pueda pasar cerca.

Ejercicio 18

La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 h.

a) ¿Qué aceleración radial tiene un objeto en el ecuador? Exprese el resultado en m/s y como fracción de g (magnitud de la aceleración de gravedad).

b) En dinámica veremos que si $a_r > g$ los objetos saldrían volando al espacio. ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación para que esto sucediera?

Resolución:

Primero que nada, los datos que nos suministran del problema son los siguientes:

Radio de la Tierra: R = 6380km = $6.38\times10^6 m$

Periodo de rotación: T = 24 h = $24\times3600=86400\,s$

a) Sabemos que la aceleración radial viene expresada la siguiente manera:

$$a_r=\omega^2 R$$

Pero, sabemos que podemos hallar la velocidad angular en función del periodo. Tenemos que:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{86400}=7.27\times10^{-5}\,\frac{rad}{s}$$

Por lo tanto, la aceleración radial será:

$$a_r=\omega^2 R=(7.27\times10^{-5})^2\cdot(6.38\times10^6)=0.0337\,\frac{m}{s^2}$$

b) Queremos que $a_r = g$

Haciendo las respectivas sustituciones algebraicas, nos quedaría:

$$g = a_r = \omega^2 R \quad \textbf{Eq.1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \textbf{Eq. 2}$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

Despejando el Periodo nos queda:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad \textbf{Periodo critico}$$

Entonces, introduciendo los valores tenemos el siguiente resultado:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6.38\times10^6}{9.81}} = 5070\,s = 1.41\,h$$

Finalmente, el periodo de rotación para que esto sucediera debería ser de 1.41 h

Ejercicio 19

Una partícula se mueve en el plano xy. Sus coordenadas en función del tiempo están dadas por

$$x(t) = R(\omega t - \sin(\omega t)) \text{ y } y(t) = R(1 - \cos(\omega t)),$$

donde R y ω son constantes. Calcule:

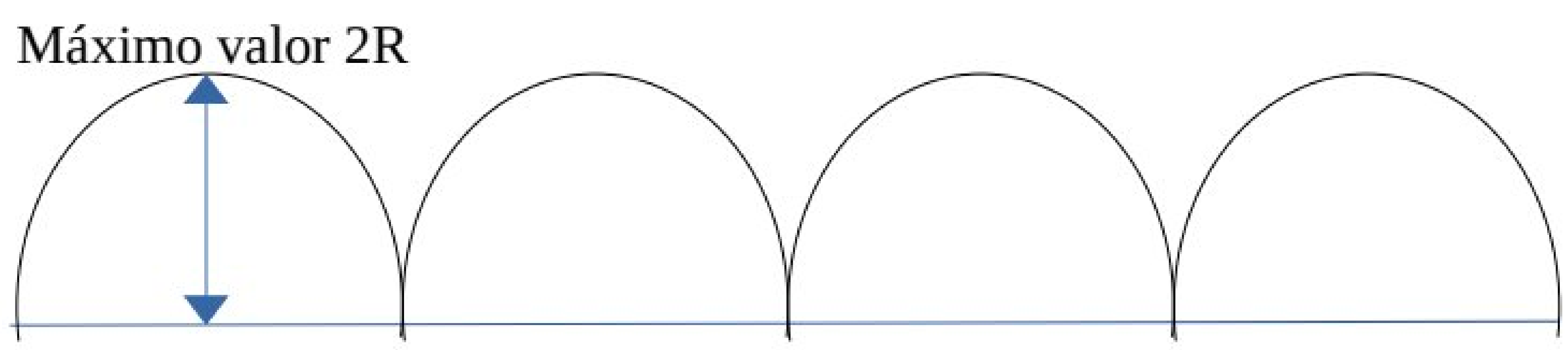
a) Calcule y dibuje la trayectoria descrita por la partícula.

b) Calcule la velocidad y la aceleración para cualquier instante de tiempo.

c) ¿En qué instantes de tiempo la partícula está instantáneamente en reposo? ¿Qué coordenadas tienen esos instantes?

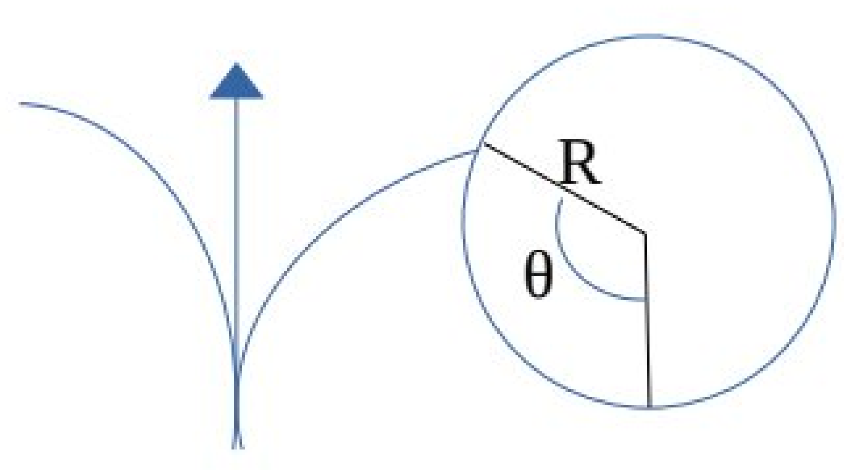
Resolución:

a) El dibujo de la trayectoria descrita por la partícula es:



CICLOIDE

x(t) crece linealmente con una componente sinusoidal superpuesto, generando un movimiento hacia adelante con oscilaciones. La forma del origen se ilustra por loo siguiente.



0 —— Rθ ————

b) Vamos a calcular primero las velocidades:

La velocidad en x(t) es

$$v_x(t)=\frac{dx(t)}{dt}=R\,\omega(1-\cos(\omega t)) \quad \forall t$$

La velocidad en y(t) es

$$v_y(t)=\frac{dy(t)}{dt}=R\,\omega\cdot sen(\omega t) \quad \forall t$$

Ahora vamos con la aceleraciones:

La aceleración en x(t) es:

$$a_x(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}=R\,\omega^2 sen(\omega t) \quad \forall t$$

La aceleración en y(t) es:

$$a_y(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}=R\,\omega^2\cos(\omega t) \quad \forall t$$

c) Está en reposo cuando su velocidad es cero. Entonces:

$$v_x(t) = 0 \quad y \quad v_y(t) = 0$$

Nos queda igualar las expresiones y tenemos

Para $v_x(t)$:

$$v_x(t)=R\,\omega(1-\cos(\omega t))=0 \rightarrow \cos(\omega t)=1$$

Para que se cumpla t debe ser igual a:

$$t=\frac{2n\pi}{\omega} \quad \text{, donde n = 0,1,2,…,∞}$$

Para $v_y(t)$:

$$v_y(t)=R\,\omega\cdot sen(\omega t)=0 \rightarrow sen(\omega t)=0$$

Para que se cumpla t debe ser igual a:

$$t=\frac{n\pi}{\omega} \quad \text{, donde n = 0,1,2,…,∞}$$

Los instantes en reposo son aquellos que se cumple simultáneamente, eso ocurre en

$$t=0,\frac{2\pi}{\omega},\frac{4\pi}{\omega},\ldots,\frac{k\pi}{\omega}$$

Las coordenadas en esos instantes son las siguientes:

Para t = 0

$$x(0) = 0 \quad , \quad y(0) = 0$$

Para t = 2π/ω

$$x(2\pi/\omega) = 2\pi R \ , \quad y(2\pi/\omega) = 0$$

Para t = 4π/ω

$$x(4\pi/\omega) = 4\pi R \ , \quad y(2\pi/\omega) = 0$$

Ejercicio 20

Un transatlántico navega a una rapidez v_0. Un pasajero sobre la cubierta pasea hacia la parte posterior del barco a una rapidez v. Después de haber caminado una distancia d, gira un ángulo α y camina a la misma rapidez hacia la barandilla que dista d′ del punto donde ha girado. ¿Cuál es su velocidad con respecto a la superficie del agua mientras camina hacia la parte posterior? ¿Y mientras camina hacia la barandilla?

Resolución:

Primera etapa: Caminando hacia la parte posterior

Escribimos con la nomenclatura adecuada, las velocidades relativas

$\vec{v}_{P/A}$ = Velocidad del pasajero respecto del agua

$\vec{v}_{P/B}$ = Velocidad del pasajero respecto al barco (-v, 0) en dirección opuesta

$\vec{v}_{B/A}$ = Velocidad del barco respecto al agua (v_0, 0)

Por lo tanto, la expresión será la suma de las velocidades relativas dando como lugar la velocidad absoluta.

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{V}_{P/A} = (v_0 - v, 0)$$

La magnitud es:

$$|\vec{V}_{P/A}| = \sqrt{(v_0 - v)^2 + (0)^2} = v_0 - v$$

Segunda etapa: Caminando una distancia d, gira un ángulo α y camina a la misma rapidez hacia la barandilla que dista d′ del punto donde ha girado.

Las velocidades vienen de la siguiente manera:

$$\vec{v}_{P/B} = (v\cos\alpha, v\,sen\,\alpha)$$

Por tanto,

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{P/A} = (v_0 + v\cos\alpha, v\,sen\,\alpha)$$

La magnitud:

$$|\vec{v}_{P/A}| = \sqrt{(v_0 + v\cos\alpha)^2 + (v\,sen\,\alpha)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2v_0 v\cos\alpha + v^2\cos\alpha^2 + v^2 sen\,\alpha^2} = \sqrt{v_0^2 + 2v_0 v\cos\alpha + v^2}$$

Ejercicio 21

Un río fluye al sur a 2,0 m/s. Un hombre cruza el río en una lancha de motor con velocidad relativa al agua de 4,2 m/s al este. El río tiene 800 m de anchura.

a) ¿Qué velocidad tiene la lancha relativa a tierra?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en cruzar el río?

c) ¿A qué distancia al sur de su punto de partida llegará a la otra orilla?

Resolución:

a) La velocidad del río respecto a tierra es:

$$\vec{v_{R/T}} = (0, -2.0)\frac{m}{s} \quad \text{(hacia el Sur)}$$

Velocidad de la lancha respecto al río:

$$\vec{v_{L/R}} = (4.2, 0)\frac{m}{s} \quad \text{(hacia el Este)}$$

También sabemos que el ancho del río es: d = 800 m

La suma de las velocidades relativas dará como resultado la velocidad de la lancha respecto a tierra, por la siguiente manera:

$$\vec{v_{L/T}} = \vec{v_{L/R}} + \vec{v_{R/T}}$$

$$\vec{v_{L/T}} = (4.2, -2.0)\frac{m}{s}$$

Por tanto, la magnitud o la rapidez de la lancha respecto a tierra será:

$$|\vec{v_{L/T}}| = \sqrt{(4.2)^2 + (-2.0)^2} = \sqrt{21.64} = 4.65\frac{m}{s}$$

b) Sabemos que el movimiento es x es rectilíneo uniforme, por tanto, el tiempo pude ser hallado como:

$$t = \frac{d}{V_{L/R,X}} = \frac{800}{4.2} = 190.5\,s = 3.18\,min$$

c) Distancia al sur de su punto de partida, será la diferencia de la componente y, ya que es un movimiento rectilíneo uniforme, tenemos lo siguiente:

$$\Delta y = v_{R/T,Y}\,t = -2.0 \times 190.5 = -381\,m$$

La lancha llegará 381m al sur de su punto de partida.

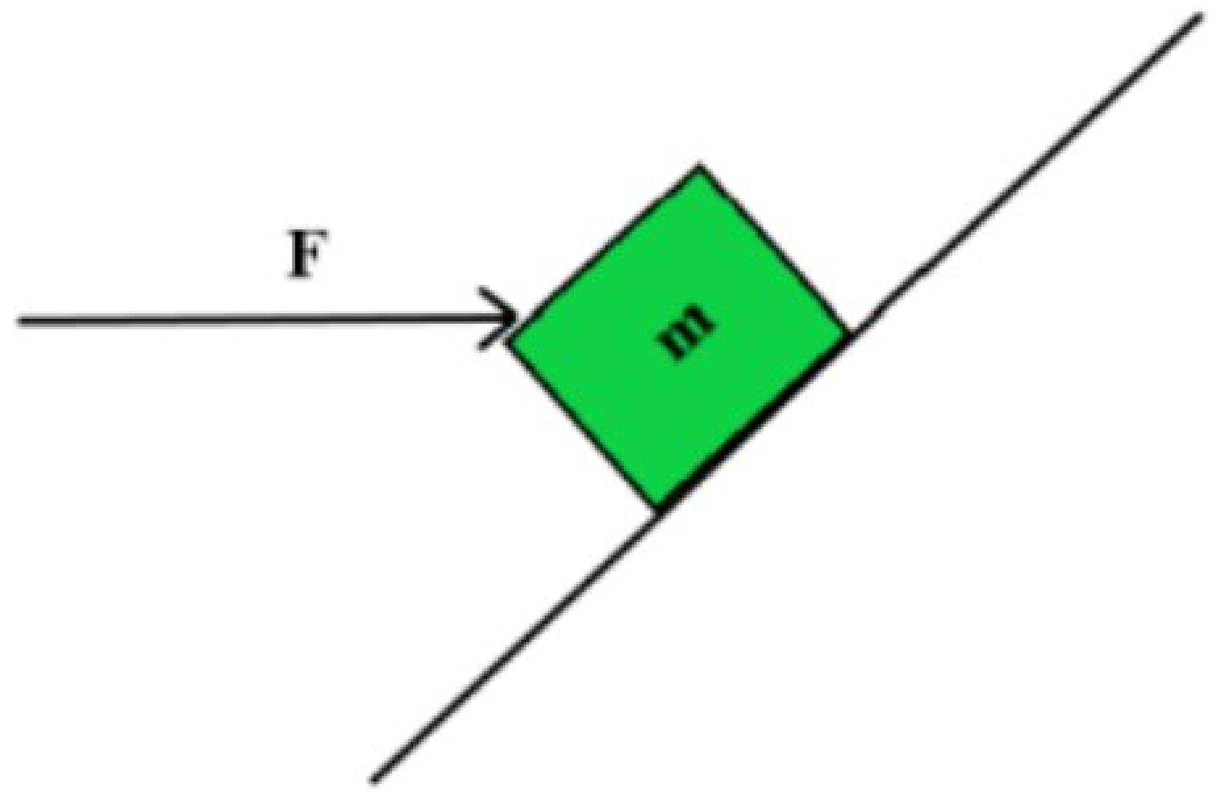
Ejercicio 22

Un cuerpo de masa m se desplaza sobre un plano rugoso que tiene constantes de fricción estática y cinemática μ_s y μ_k , respectivamente. Adicionalmente, el plano está inclinado un ángulo ϕ respecto a la horizontal y la sobre la masa está aplicada una fuerza horizontal de magnitud F.

a) Si la masa se desplaza cuesta arriba sobre el plano con una velocidad inicial $\vec{v}(0)=\vec{v}_0$, calcule la fuerza que ejerce el plano sobre la partícula.

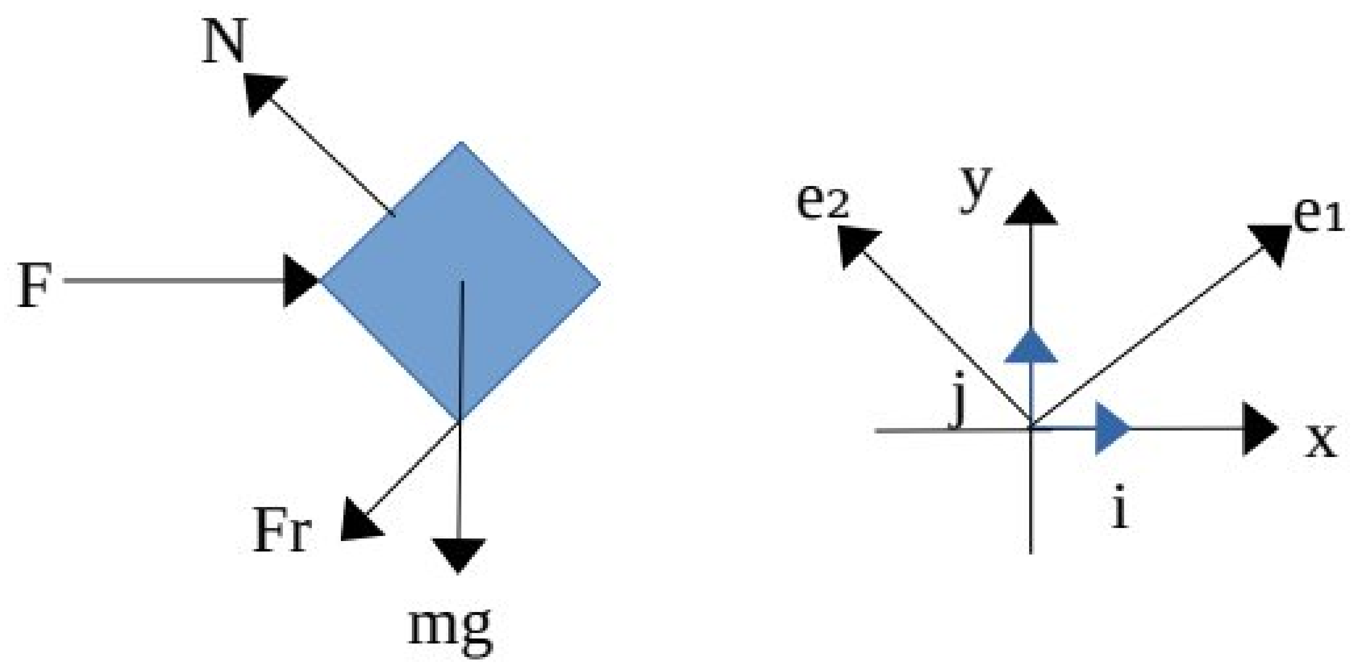
b) Halle la velocidad de la masa ∀ t ≥ 0.

c) ¿Qué valor mínimo debe tener F para que la masa siga en movimiento?



Resolución:

a) Lo primero que debemos hacer siempre en un problema de dinámica es dibujar el diagrama de cuerpo libre, en este caso tenemos y el sistema referencia con el cuál trabajaremos:

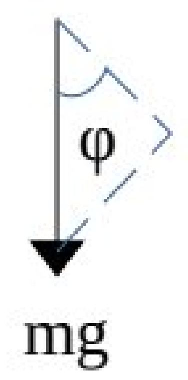


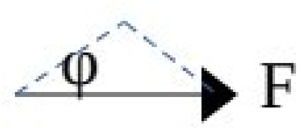
A parir de los diagramas, construimos el sistema de ecuaciones que determina el movimiento del cuerpo, usan la nueva base vectorial.

Recordando que la descomposición de fuerzas sale de

$\hat{e}_1 : -mgsen\,\phi + Fcos\,\phi$

$\hat{e}_2 : -mgcos\,\phi - Fsen\,\phi$





$$\sum \overrightarrow{F^E_{\hat{e}_1}} = Fcos\,\phi - mgsen\,\phi - Fr = m\vec{a} \quad \textbf{Eq.1}$$

$$\sum \overrightarrow{F^E_{\hat{e}_2}} = N - mgcos\,\phi - Fsen\,\phi = 0 \quad \textbf{Eq.2}$$

A partir de la ecuación (2), despejamos la normal y con ello obtenemos la fuerza que ejerce el plano sobre la partícula.

$$N = mgcos\,\phi + Fsen\,\phi$$

b) A partir de la ecuación (1), vamos a despejar la aceleración, además, vamos a sustituir sobre la expresión de la fricción en función de los coeficientes estáticos. Tenemos que:

$$Fr = \mu_k|N| = \mu_k|mgcos\,\phi + Fsen\,\phi| = \mu_k mgcos\,\phi + Fsen\,\phi \quad \textbf{Eq.3}$$

Introducimos (3) en (1) junto al despeje de aceleración:

$$Fcos\,\phi - mgsen\,\phi - (\mu_k mgcos\,\phi + Fsen\,\phi) = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{Fcos\,\phi - mgsen\,\phi - (\mu_k mgcos\,\phi + Fsen\,\phi)}{m} = \frac{F(\cos\phi - \mu_k sen\,\phi) - mg(sen\,\phi + \mu_k \cos\phi)}{m}$$

Recordando de cinemática, sabemos que para un movimiento uniformemente acelerado tenemos lo siguiente:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t \quad \forall t$$

Como la velocidad inicial nos la dan el problema simplemente basta con sustituir la expresiones de aceleración y velocidad inicial:

$$v(t) = v_0 + \left(\frac{F(\cos\phi - \mu_k sen\,\phi) - mg(sen\,\phi + \mu_k \cos\phi)}{m}\right)\cdot t \quad \forall t$$

c) Para que la partícula siga en movimiento, se deben cumplir dos condiciones:

$$\sum \overrightarrow{F^{E}_{\hat{e}_1}} > 0 \vee Fr \geq u_s|N|$$

Entonces, tenemos lo siguiente:

$$Fcos\,\phi - mgsen\,\phi - \mu_s N > 0$$

Ahora, simplemente despejamos la fuerza F, y nos quedaría:

$$F > mg\frac{sen\,\phi + \mu_s \cos\phi}{\cos\phi - \mu_s sen\,\phi}$$

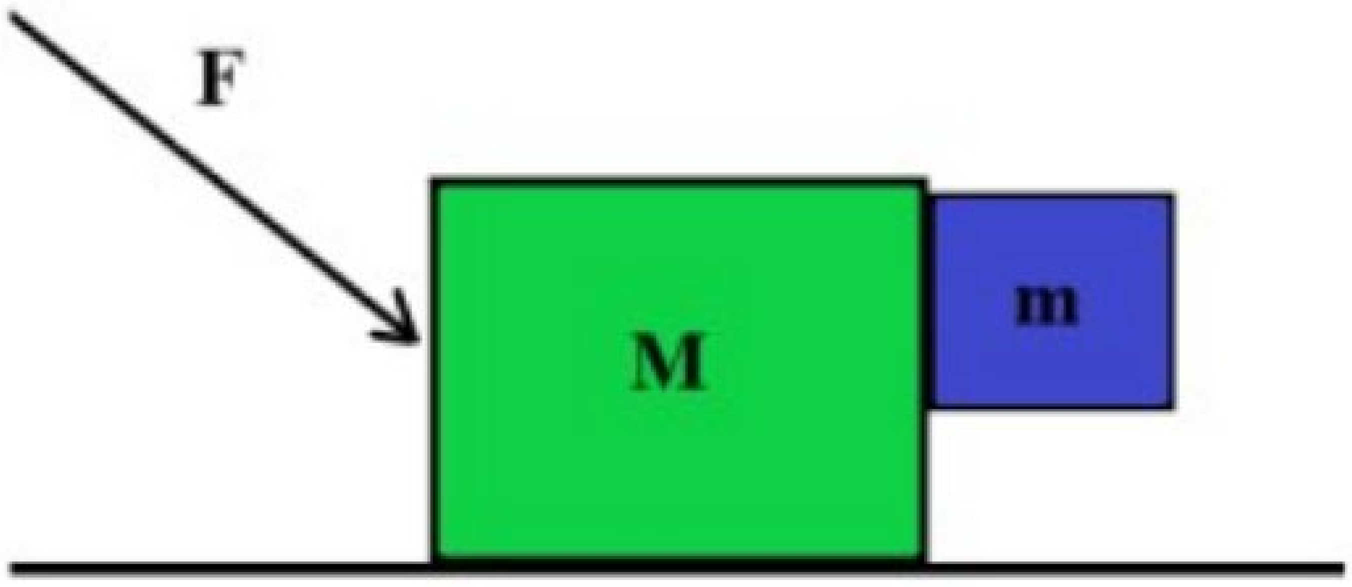
Ejercicio 23

Un cuerpo de masa M se desplaza sin roce por una superficie horizontal. Con un ángulo β respecto a la horizontal, se aplica sobre M una fuerza constante $\vec{F}$. Por medio del movimiento, el cuerpo M empuja a otro cuerpo de masa m que se encuentra separado de la superficie horizontal. Entre m y M los coeficientes de fricción estático y dinámico son μ_e y μ_d, respectivamente.

a) Si el sistema parte inicialmente del reposo, halle la aceleración del sistema y su velocidad ∀ t ≥ 0.

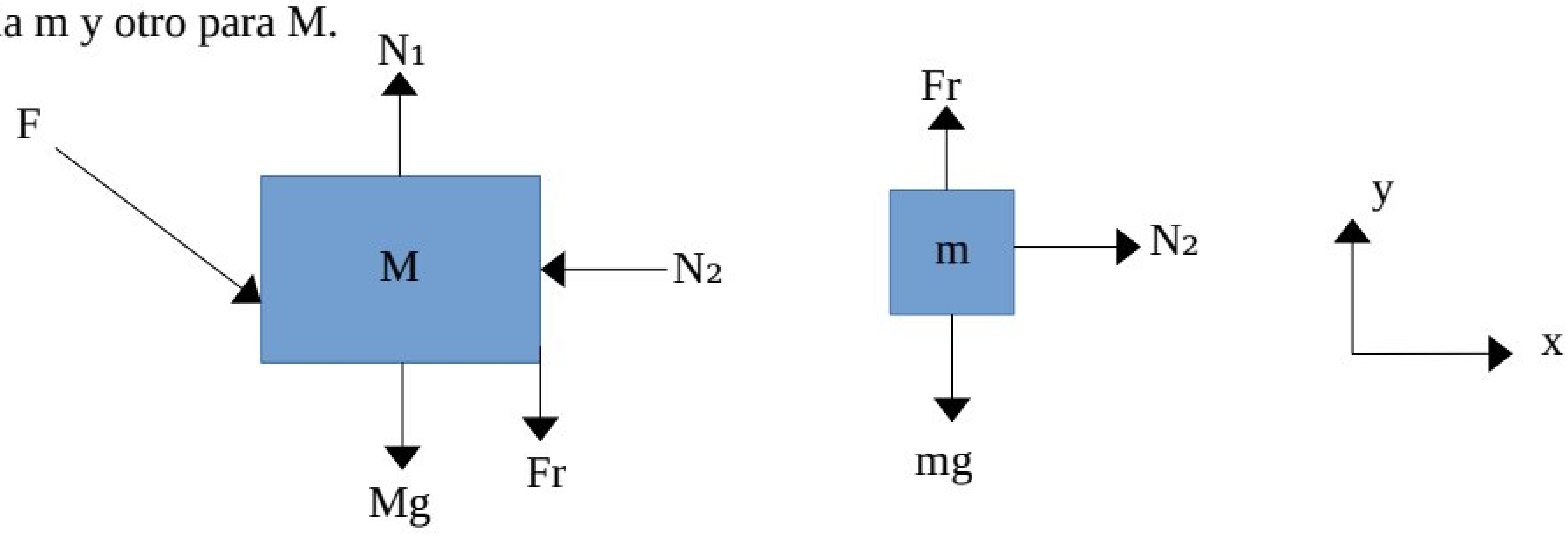
b) Halle la fuerza que ejerce el bloque m sobre M.

c) ¿Qué magnitud mínima debe tener la fuerza F para que el bloqueo m no se desplace respecto a la superficie de contacto con M?



Resolución:

a) Como siempre dibujamos nuestro diagrama de cuerpo libre primero, en este caso tendremos dos, uno para la partícula m y otro para M.



Escribimos las ecuaciones de movimiento:

$$\sum F_{y,M} = N_1 - Mg - Fr - Fsen\beta = 0 \quad \text{Eq.1}$$

$$\sum F_{x,M} = Fcos\beta - N_2 = M\vec{a} \quad \text{Eq.2}$$

$$\sum F_{y,m} = Fr - mg = 0 \quad \text{Eq.3}$$

$$\sum F_{x,m} = N_2 = m\vec{a} \quad \text{Eq.4}$$

Además, recordamos que:

$$Fr = \mu_d N_2 \quad \text{Eq.5}$$

De la ecuación (2) vamos a despejar la aceleración y sustituimos la (4) en ella:

$$Fcos\beta - ma = M\,a \rightarrow Fcos\beta = (M+m)a$$

$$a = \frac{Fcos\beta}{M+m}$$

y la normal dos será:

$$N_2 = ma = m\frac{Fcos\beta}{M+m}$$

Ahora bien, con respecto a las velocidades, sabemos que parte del reposo para un t = 0 s → ($v_0 = 0$). Entonces la velocidad ∀t será:

$$v(t) = v_0 + a\,t = at$$

$$v(t) = \left(\frac{F\cos\beta}{M+m}\right)\cdot t \quad \forall t$$

b) En este caso, la fricción basta con utilizar solo la ecuación (5) y despejar la expresión de la normal 2, tenemos que:

$$Fr = \mu_d N_2 = \mu_d m\,a = \frac{\mu_d m\cdot F\cos\beta}{M+m}$$

c) La fricción debe ser mayor o igual que el peso de m, tenemos:

$$Fr \geq mg \rightarrow \mu_e N_2 \geq mg$$

$$\mu_e m \frac{F\cos\beta}{M+m} \geq mg \rightarrow \mu_e \frac{F\cos\beta}{M+m} \geq g$$

Por lo tanto, la fuerza F despejada:

$$F \geq g\frac{(M+m)}{\mu_e \cos\beta}$$

Entonces, la fuerza mínima debe ser simplemente igual a eso:

$$F_{mín} = g\frac{(M+m)}{\mu_e \cos\beta}$$

Ahora con esto, podemos despejar de (1) N_1 y así obtener el valor requerido de la normal para que la partícula m no descienda.

$$N_1 = Mg + Fr + F sen\,\beta = Mg + \frac{\mu_d m\cdot F\cos\beta}{M+m} + g\frac{(M+m)}{\mu_e\cos\beta} sen\,\beta$$

$$N_1 = g(M+m)\left(1 + \frac{tg\,\beta}{\mu_e}\right)$$

Y si $N_1 \geq 0$: Entonces

$$1 + \frac{tg\,\beta}{\mu_e} \leqslant 0 \rightarrow tg\,\beta \geq \mu_e$$

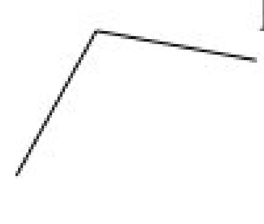
Ejercicio 24

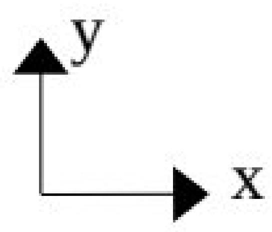
Peralte I: Una curva de radio R en un camino horizontal tiene un peralte adecuado para ir a una rapidez v′. Si un vehículo toma dicha curva a una rapidez v_1, ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática debe haber entre las ruedas y el camino para que el vehículo no derrape?

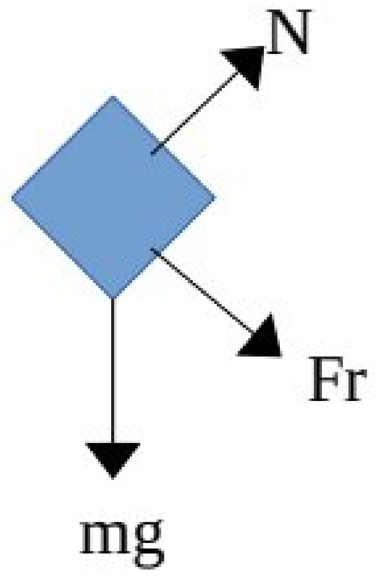
Resolución:

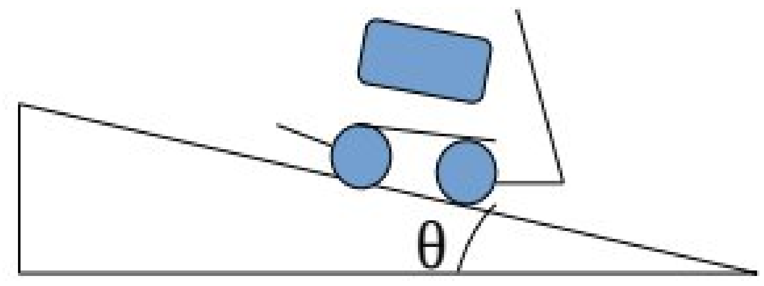
Realizamos el diagrama de cuerpo libre del vehículo

Esquema del carro agarrando una peralta









Descomponiendo la fuerza normal y fricción en función del ángulo θ, podemos escribir las ecuaciones de movimiento con respecto al eje horizontal y vertical:

$$\sum \overrightarrow{F_y^E} = N\cos\theta - mg - Fr\,sen\,\theta = 0 \quad \textbf{Eq. 1}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x^E} = N\,sen\,\theta + Fr\cos\theta = ma_c \quad \textbf{Eq. 2}$$

De la ecuación dos podemos escribir la aceleración centrípeta en función de la velocidad tangencial y el radio

$$N\,sen\,\theta + Fr\cos\theta = m\frac{V^2}{R}$$

Además, sabemos que la fuerza de fricción también se puede expresar mediante la siguiente relación:

$$Fr \leqslant \mu_S N$$

Sustituyendo en la ecuación uno y despejando la normal, nos queda la siguiente ecuación:

$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_S\,sen\,\theta} \quad \textbf{Eq. 3}$$

Sustituyendo 3 en 2 nos queda que:

$$\left(\frac{mg}{\cos\theta - \mu_S\,sen\,\theta}\right) sen\,\theta + \mu_S \left(\frac{mg}{\cos\theta - \mu_S\,sen\,\theta}\right)\cos\theta = m\frac{V^2}{R}$$

Despejamos el coeficiente de fricción

$$\left(\frac{mg}{\cos\theta - \mu_S\,sen\,\theta}\right) sen\,\theta + \mu_S \left(\frac{mg}{\cos\theta - \mu_S\,sen\,\theta}\right)\cos\theta = m\frac{V^2}{R}$$

$$\frac{g\left(sen\,\theta + \mu_S\cos\theta\right)}{\cos\theta - \mu_S\,sen\,\theta} = \frac{V^2}{R} \rightarrow g\left(sen\,\theta + \mu_S\cos\theta\right) = \frac{V^2}{R}\cos\theta - \frac{V^2}{R}\mu_S\,sen\,\theta$$

$$\mu_S\left(g\cos\theta + \frac{V^2}{R}sen\,\theta\right) = \frac{V^2}{R}\cos\theta - g\,sen\,\theta$$

Por lo tanto, el mínimo valor del coeficiente de fricción estática que debe tomar para que el vehículo no derrape es:

$$\mu_{Smín} = \frac{\frac{V^2}{R}\cos\theta - g\,sen\,\theta}{g\cos\theta + \frac{V^2}{R}sen\,\theta}$$

Ejercicio 25

Peralte II: Considere un camino húmedo peraltado, donde hay coeficientes de fricción estática y dinámica entre la superficie y las ruedas de μ_s y μ_d, respectivamente. El radio de la curva es R y el ángulo del peralte es β por encima de la horizontal.

a) ¿Qué rapidez máxima puede tener un vehículo antes de resbalar peralte arriba?

b) ¿Qué rapidez mínima debe tener para no resbalar peral abajo?

Resolución:

Para este problema que es una continuación del anterior, no hace falta por tanto hacer diagrama de cuerpo libre ya que es el mismo, y solo jugamos con los sentidos de la fricción y velocidad. Para el primer caso tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\sum \vec{F}_y^E = N\cos\beta - mg - Fr\,sen\beta = 0 \quad \textbf{Eq. 1}$$

$$\sum \vec{F}_x^E = N\,sen\beta + Fr\cos\beta = m\frac{V_{máx}^2}{R} \quad \textbf{Eq. 2}$$

Donde

$$Fr = \mu_S N$$

Sustituyendo la nueva expresión en uno obtenemos

$$N = \frac{mg}{\cos\beta - \mu_S\,sen\beta} \quad \textbf{Eq. 3}$$

Sustituimos 3 en 2 y despejamos la rapidez máxima

$$V_{máx} = \sqrt{\frac{Rg(sen\beta + \mu_S\cos\beta)}{\cos\beta - \mu_S\,sen\beta}}$$

Cuando la rapidez es menor, tiende a resbalar hacia abajo y la fricción actuá hacia arriba con un coeficiente fricción μ_d, por tanto, al hacer uso de las mismas ecuaciones y procedimiento anterior tenemos que:

$$\sum \vec{F}_y^E = N\cos\beta - mg + Fr\,sen\beta = 0$$

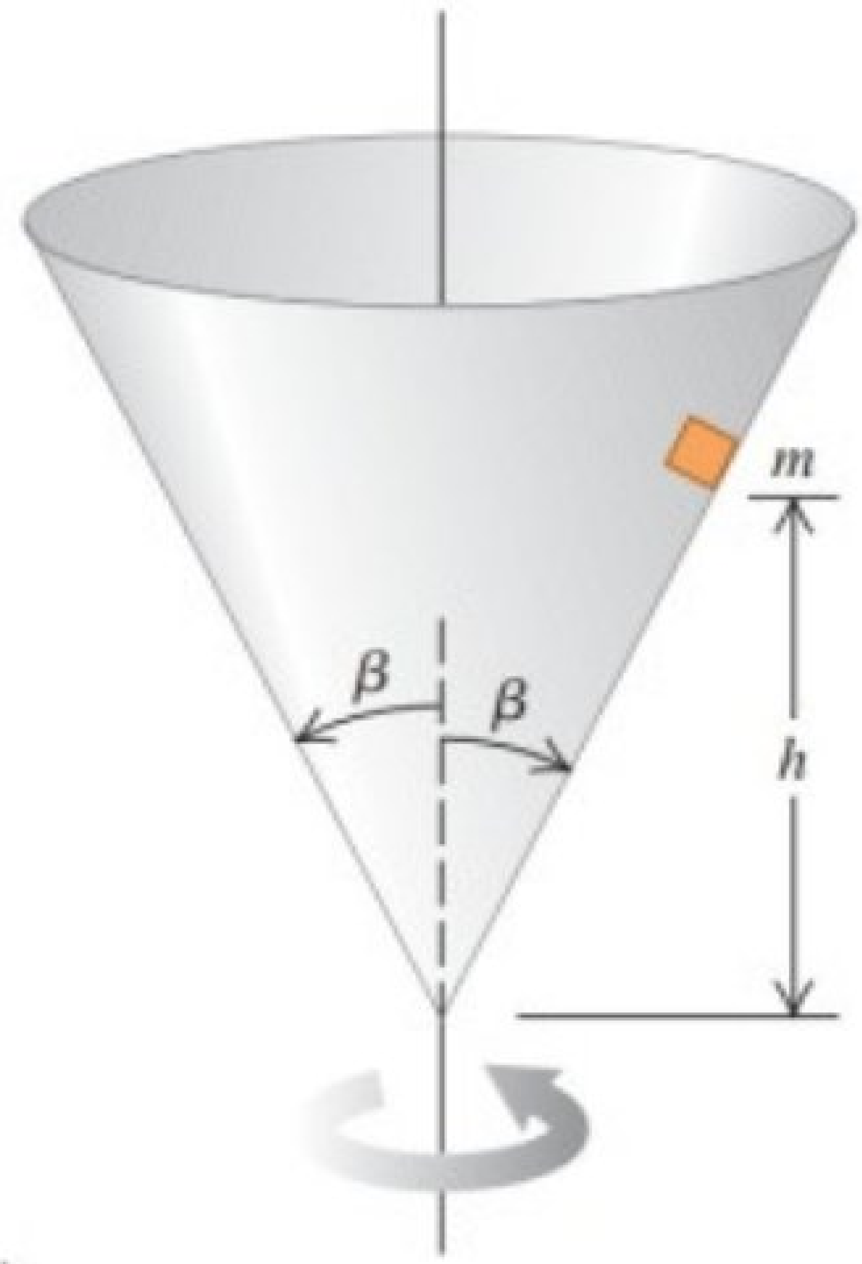
$$\sum \vec{F}_x^E = N\,sen\beta - Fr\cos\beta = m\frac{V_{mín}^2}{R}$$

Por lo tanto, finalmente, rapidez mínima debe tener para no resbalar peral abajo es:

$$V_{mín} = \sqrt{\frac{Rg(sen\beta - \mu_d\cos\beta)}{\cos\beta + \mu_d\,sen\beta}}$$

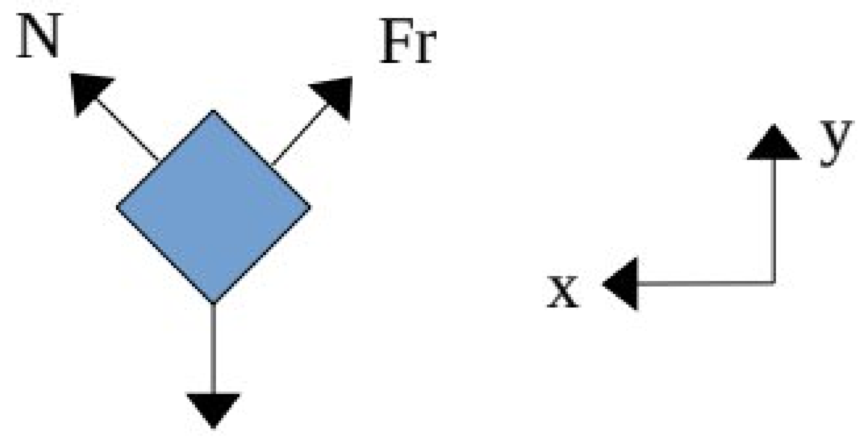
Ejercicio 26

Un bloque de masa m se pone dentro de un cono invertido que gira sobre un eje vertical de modo que su período es T. las paredes del cono forman un ángulo β con la vertical. El coeficiente de fricción estática y dinámica entre el bloque y el cono son μ_s y μ_d, respectivamente. Si el bloque ha de mantenerse a una altura h, ¿Qué valores mínimos y máximos puede tener T?



Resolución:

Realizamos el diagrama de cuerpo libre del bloque



Podemos observar que por relación geométrica el radio del cono es:

$$tg\,\beta=\frac{r}{h}\rightarrow r=h\,tg\,\beta$$

Escribiendo las ecuaciones de movimiento vertical y horizontal tenemos que:

$$\sum F_v=N\cos\beta\pm Frsen\,\beta=mg \quad \textbf{Eq. 1}$$

$$\sum F_h=N\,sen\,\beta\mp Frcos\,\beta=ma_c=m\,\omega^2 r=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(h\,tg\,\beta) \quad \textbf{Eq. 2}$$

Caso 1. Fricción hacia arriba (Periodo mínimo)

En este caso la fricción es igual a Fr = μ_SN el bloque se mantiene en la altura h con coeficiente de ficción estático y un periodo menor ya que indica que es como si empezara a descender sobre el cono realizando curvas mas cortas. Prosiguiendo con esto, sustituimos esa expresión en uno, y despejamos la normal.

$$N\cos\beta+\mu_S N sen\beta=mg$$

$$N=\frac{mg}{\cos\beta+\mu_S sen\beta} \quad \textbf{Eq. 3}$$

De la misma manera haremos lo mismo con la ecuación 2, y sustituimos 3 en 2 para obtener:

$$N sen\beta-\mu_S N cos\beta=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(h\, tg\beta)$$

$$\frac{mg}{\cos\beta+\mu_S sen\beta}(sen\beta-\mu_S\cos\beta)=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(h\, tg\beta)$$

Despejamos el periodo T

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{g(sen\beta-\mu_S\cos\beta)}{h(tg\beta)(\cos\beta+\mu_S sen\beta)}$$

$$T^2=\frac{4\pi^2 h\cdot tg\beta(\cos\beta+\mu_S sen\beta)}{g(sen\beta-\mu_S\cos\beta)}$$

$$T_{mín}=2\pi\sqrt{\frac{h\cdot tg\beta(\cos\beta+\mu_S sen\beta)}{g(sen\beta-\mu_S\cos\beta)}}$$

Caso 2. Fricción hacia abajo (Periodo máximo)

En este caso repetiremos el mismo procedimiento anterior pero cambiando los sentidos de la fuerza de fricción. Por tanto, los resultados serán los siguientes:

$$N=\frac{mg}{\cos\beta-\mu_S sen\beta}$$

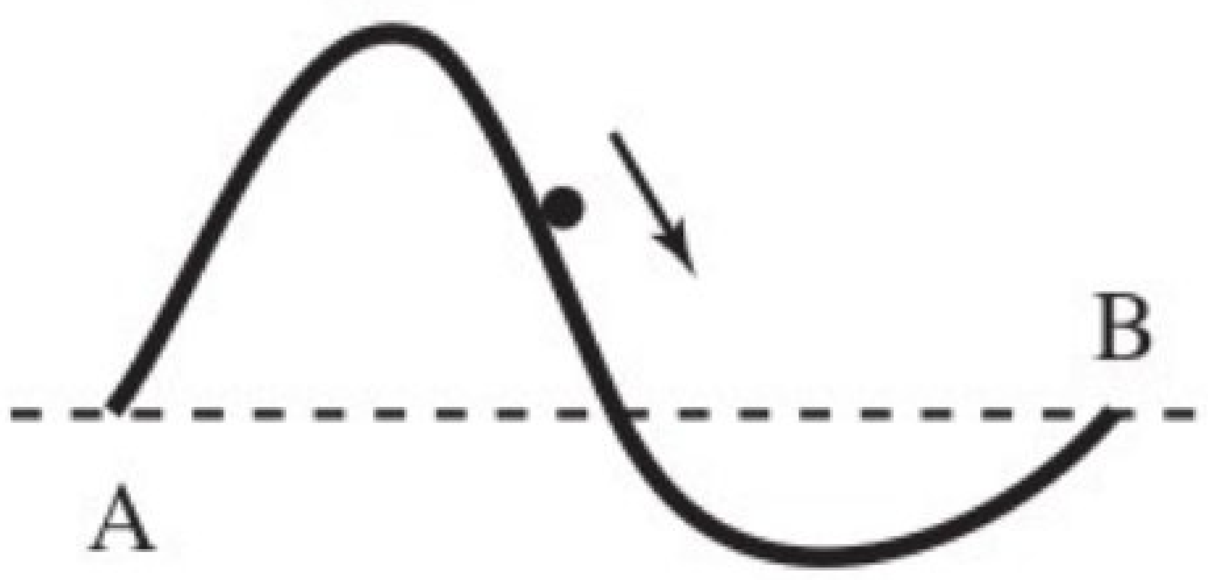
$$T_{máx}=2\pi\sqrt{\frac{h\cdot tg\beta(\cos\beta-\mu_S sen\beta)}{g(sen\beta+\mu_S\cos\beta)}}$$

Por lo tanto, el resultado será el intervalo de período que se encuentra entre el mínimo y máximo, así que el resultado de los valores mínimos y máximos que puede tener T son:

$$T \in [T_{mín}, T_{máx}]$$

Ejercicio 27

La figura muestra, en línea llena, parte de la trayectoria de un carrito en una montaña rusa;
sus puntos inicial y final, A y B, están a la misma altura. Hay roce entre el carrito y la pista. En la trayectoria mostrada los trabajos realizados por las fuerzas de gravedad y roce que actúan sobre el carrito son respectivamente



Resolución:

- Trabajo de la gravedad:

La fuerza de gravedad es conservativa, y el trabajo realizado por una fuerza conservativa depende únicamente de las posiciones inicial y final, no de la trayectoria. Dado que los puntos A y B están a la misma altura, el cambio en la energía potencial gravitatoria es cero. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza de gravedad es cero.

$$W_{gravedad} = -\Delta U$$
$$U = mgh$$
$$\Delta U = U_B - U_A = mgh_B - mgh_A = mg(h_B - h_A) = 0$$
$$W_{gravedad} = -\Delta U = 0$$

- La fuerza de fricción siempre actúa en dirección opuesta al movimiento, por lo que realiza trabajo negativo

$$W_{Fr}^{N.C} = \int_A^B \vec{Fr} \cdot \vec{dr}$$
$$\vec{Fr} = -\mu N \hat{e} \quad \text{ó} \quad \vec{Fr} = \mu N(-\hat{e})$$
e → vector tangente a la trayectoria
$$W_{Fr}^{N.C} = \int_A^B -\mu N\, ds$$
$$W_{Fr}^{N.C} < 0$$

Cero y negativo

Ejercicio 28

Sobre una partícula que se mueve en el eje x actúa la fuerza $F = (3x^2 - 1)\, \hat{u}_x$ donde x es la posición de la partícula y todas las unidades pertenecen al SI. El trabajo, en Joules, realizado por esta fuerza cuando la partícula se mueve desde el origen al punto x = 2 es?

Resolución:

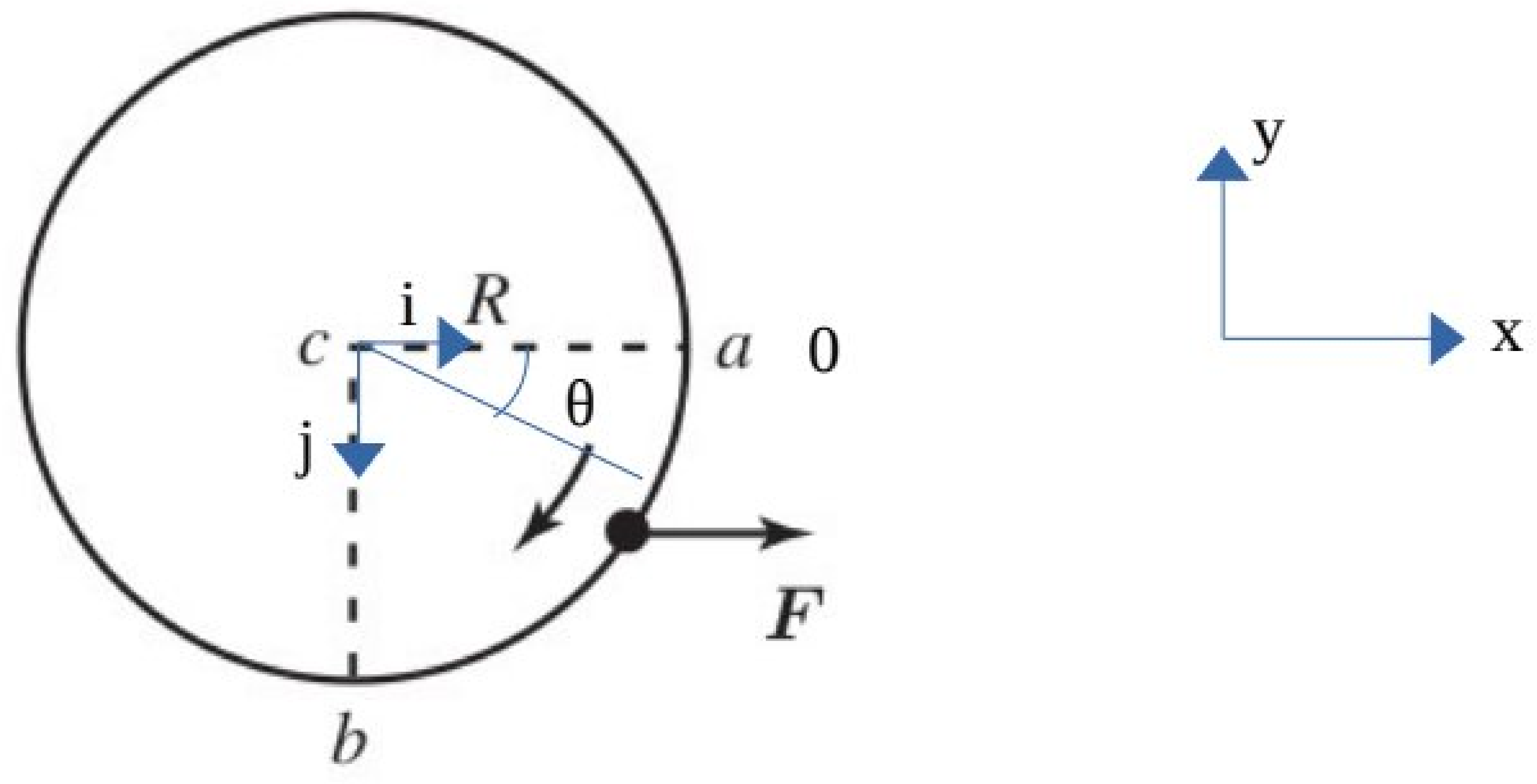
Por definición de trabajo, tenemos que:

$$W = \int_0^2 \vec{F} \cdot \vec{dx} = \int_0^2 (3x^2 - 1)\, dx = x^3 - x \Big|_0^2 = 6\, J$$

Ejercicio 29

La figura muestra una partícula que se mueve sobre un riel de radio R y centro c. Las líneas ca y cb son perpendiculares. Sobre la partícula actúa una fuerza F constante de módulo F y paralela a ca. El trabajo realizado por F cuando la partícula va de a hasta b es?

Resolución:



-π/2

Resolución:
Por definición de trabajo, tenemos que:

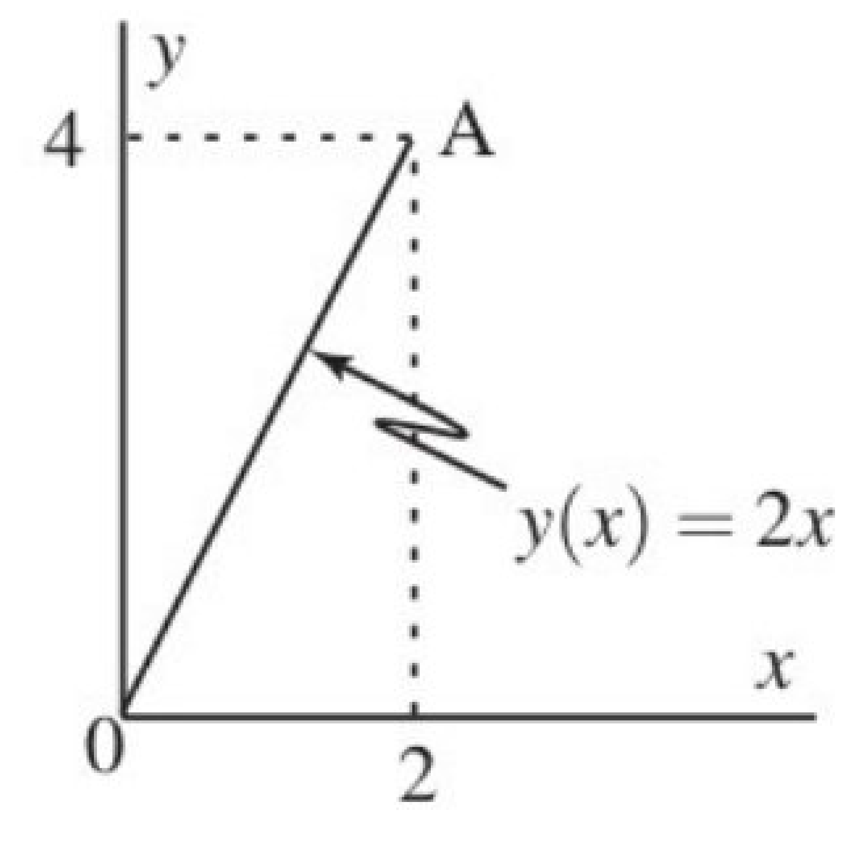
$$W=\int_a^b \vec{F}\cdot\vec{dr}=\int_a^b F(\hat{i})\cdot\vec{dr}$$

$$dr=ds=Rd\,\theta$$

$$\vec{ds}=Rd\,\theta(\cos\theta\hat{i}-sen\,\theta\hat{j}) \qquad , \quad S=\theta R$$

$$W=\int_a^b F(\hat{i})\cdot\vec{ds}=\int_a^b F(\hat{i})\cdot Rd\,\theta(\cos\theta\hat{i}-sen\,\theta\hat{j})=\int_0^{-\frac{\pi}{2}} FRcos\,\theta d\,\theta=FRsen\,\theta\Big|_0^{-\frac{\pi}{2}}=-FR$$

Ejercicio 30
Sobre una partícula que se mueve en el plano xy actúa la fuerza F = 3xy i donde (x, y) son las coordenadas de la partícula (todas las unidades son del SI). El trabajo realizado por esta fuerza a lo largo de la recta que va del origen al punto A de coordenadas (2,4) es?



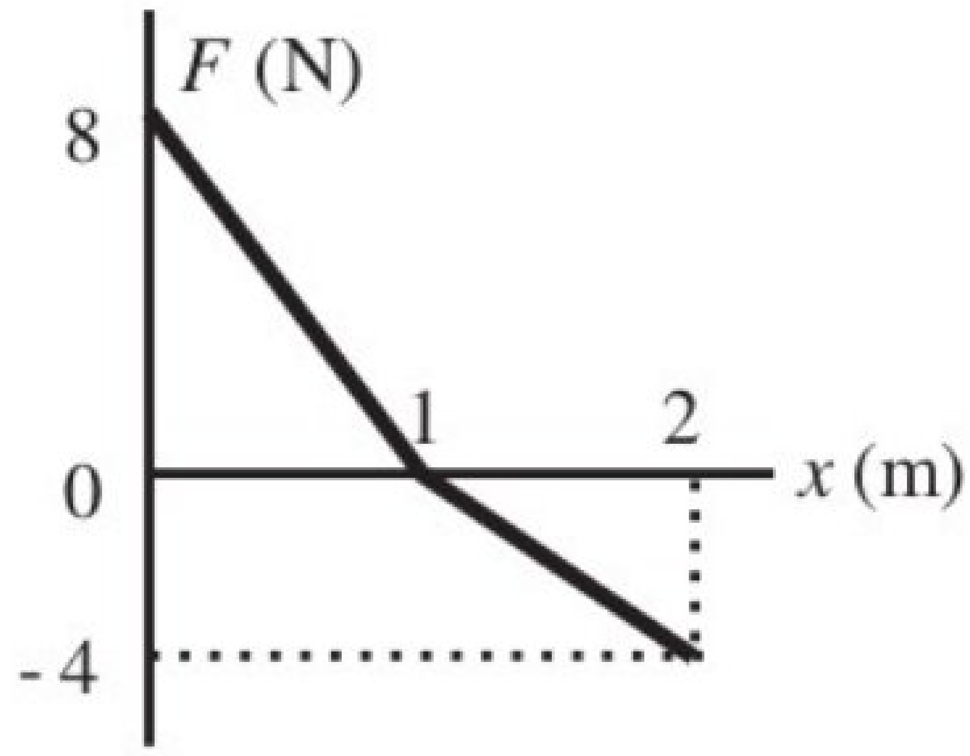
Sugerencia: Halle F en función de x para los puntos sobre la curva.

Resolución:

Por definición de trabajo, tenemos que:

$$W=\int_0^2 \vec{F}\cdot\vec{dx}=\int_0^2 F(\hat{i})\cdot dx(\hat{i})=\int_0^2 3xy\cdot dx=\int_0^2 3x(2x)\cdot dx=2x^3\Big|_0^2=16\,J$$

Ejercicio 31
Una partícula, en el origen y de masa 1 kg, parte del reposo mientras está sometida únicamente a la fuerza F = F(x) û x , donde F(x) es dada en la gráfica. La rapidez de la partícula en x = 2 m, en m/s, es?



Resolución:

Por teorema de trabajo y energía:

$$W=\Delta K$$

Donde, la energía cinética se define como:

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \quad , \qquad K=\frac{1}{2}m|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|=\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2=\frac{1}{2}mv^2$$

Por definición de trabajo, tenemos que:

$$W=\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dr}$$

$$W=\frac{F_1\cdot x_1}{2}+\frac{F_2\cdot x_2}{2}=\frac{8\cdot 1}{2}+\frac{-4\cdot 1}{2}=4-2=2\,N\cdot m=2\,J$$

Ahora retomando la expresión original, tendríamos:

$$W=\Delta K=\frac{1}{2}mv_F{}^2-\frac{1}{2}mv_O{}^2 \quad \text{, donde v\_o = 0}$$

$$W=\frac{1}{2}mv_F{}^2$$

$$2=\frac{1}{2}(1)v_F{}^2\rightarrow v_F=2\,m/s$$

Ejercicio 32
Una partícula de masa 2 kg inicialmente en reposo siente una fuerza neta dada por F = 6t û x donde t es el tiempo y todas las unidades pertenecen al Sistema Internacional. El trabajo, en Joules, realizado por esta fuerza entre t = 0 y t = 2 seg es?

Resolución:
$F_{NETA} = 6t$
Sabemos que una fuerza Neta por Newton es;

$$F_{NETA} = m.a$$

Una expresión alternativa de trabajo en función de fuerza y velocidad es:

$$W=\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

Conociendo la aceleración podemos hallar la velocidad, entonces:

$$F_{NETA}=m.a\rightarrow a=\frac{F_{NETA}}{m}=\frac{6t}{2}=3t \quad \text{m/s}^2$$

Por definición la velocidad es,

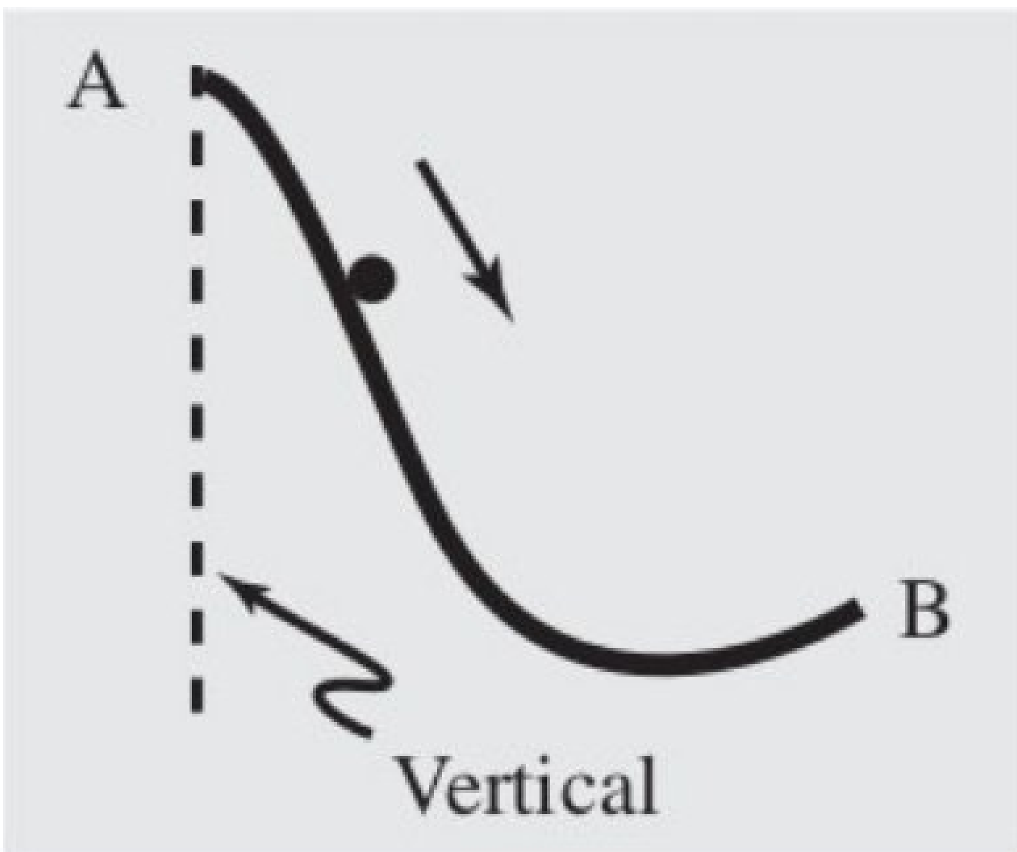
$$v(t)=\int a\,dt=\int 3t\,dt=\frac{3t^2}{2}+C \quad \text{, v(0) = 0 reposo} \rightarrow \text{C = 0}$$

$$v(t)=\frac{3t^2}{2}$$

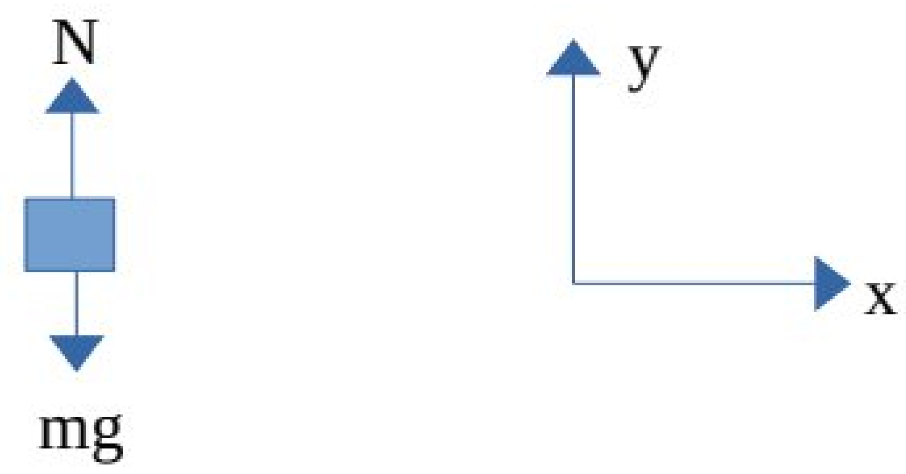
Sustituyo la expresión dentro de la de trabajo que tenemos:

$$W=\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt=\int_0^2 6t\cdot\frac{3t^2}{2}\,dt=\int_0^2 9t^3\,dt=\frac{9}{4}t^4\Big|_0^2=36J$$

Ejercicio 33
La figura muestra una pista inmersa en un fluido. Una partícula se mueve sobre la pista con rapidez constante desde el punto A al B; la partícula está sometida a su peso, la normal con la pista y a una fuerza amortiguadora debida al fluido. La fuerza neta sobre la partícula cumple que



Resolución:
Realizamos primero un DCL (REPOSO)



por lo tanto, podemos concluir que N = mg, En movimiento la sumatoria de fuerza nos queda:

$$\sum F = F_{NETA} = -mg + N + F_{amortiguación} = m \cdot a$$

$$F_{amortiguación} = m \cdot a \rightarrow -cv = m \cdot a$$

Por teorema de trabajo y energía,

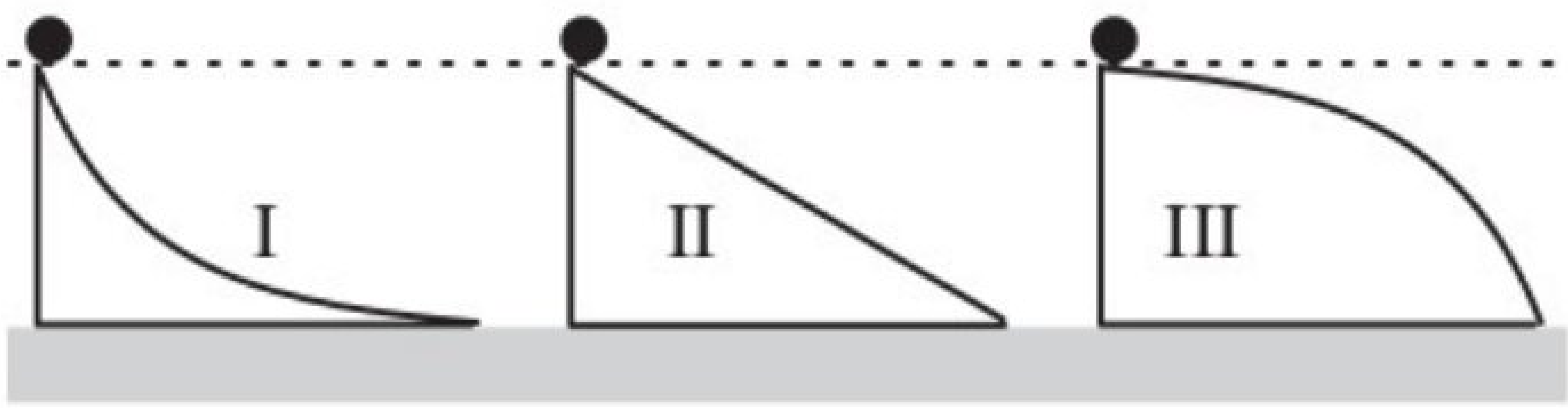
$$w = \Delta K = K_F - K_I = K_F$$

$$K_F = \frac{1}{2} m v^2$$

$$F_{NETA} = F_{amortiguación} = -cv$$

Ejercicio 34

La figura muestra 3 toboganes sin roce, todos de la misma altura. Desde la parte superior de cada uno de ellos se deja caer un objeto, todos de distinto peso. Al llegar abajo, el objeto con mayor rapidez será



Resolución:

Por teorema de trabajo y energía, tenemos la siguiente definición:

$$W^{N.C} = \Delta E_{mecánica} = \Delta K + \Delta U$$

$$W^{N.C} = (K_F + U_F) - (K_I + U_I)$$

No hay fuerzas no conservativas, por lo que podemos concluir que no hay trabajo no conservativo

$$W^{N.C} = 0$$

$$K_F + U_F = K_I + U_I$$

Al inicio la cinética es cero debido a que parte del reposo, de la misma forma, al final la energía potencial es cero. Nos queda que:

$$K_F = U_I$$

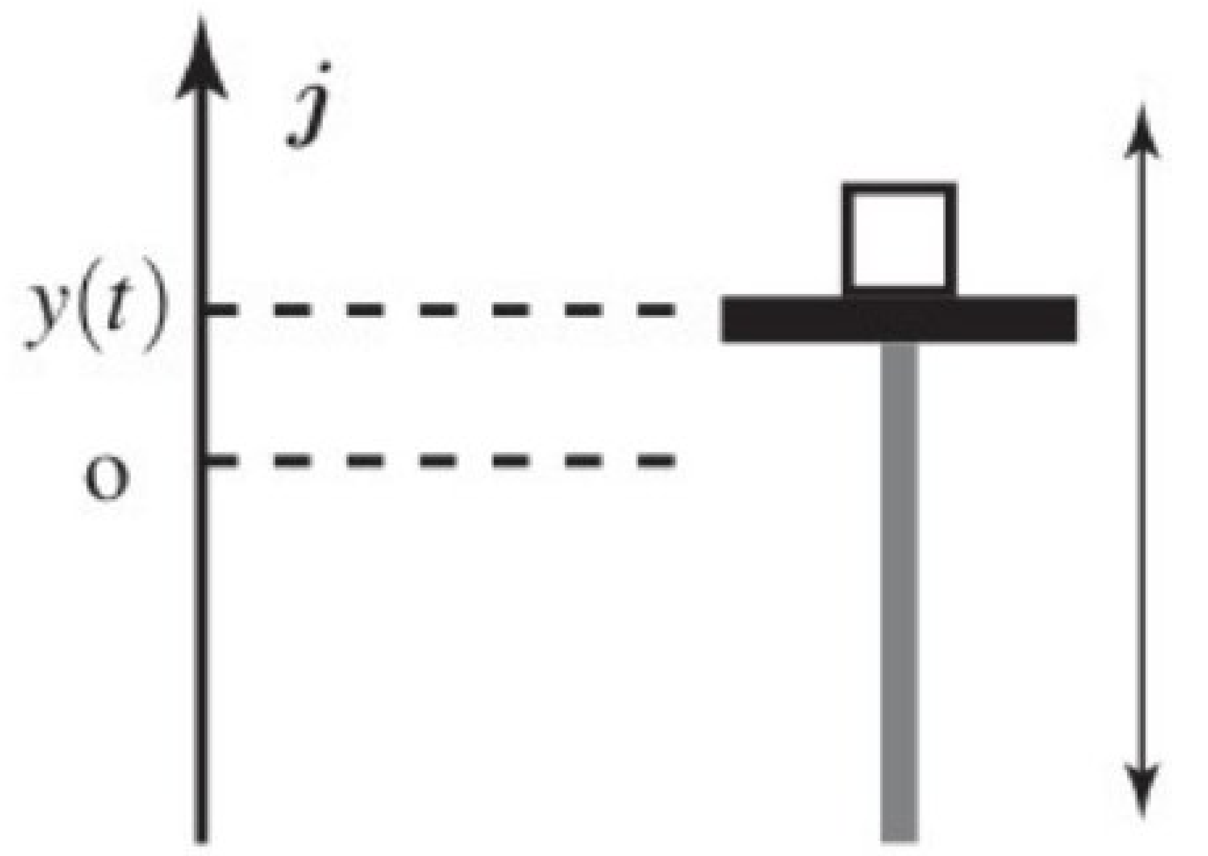
$$\frac{1}{2} m v_F^2 = mgh_i$$

$$v_F = \sqrt{2 g h_i}$$

Conclusión, todos tendrán la misma rapidez.

Ejercicio 35

Un bloque se apoya sobre un pistón, ver figura. Un mecanismo no mostrado hace que el pistón oscile verticalmente siendo su posición en función del tiempo y(t) = A sen(ω t + δ). ¿Para qué valores de la amplitud A el bloque no se despega del pistón?



Resolución:
Condición: Que la aceleración máxima del pistón hacia abajo no supone la aceleración de la gravedad.

a) Aceleración del pistón:

$$a(t)=\frac{d^2y}{dt^2}=-A\,\omega^2 sen(\omega t+\delta)=-X\,sen(\omega t+\phi)$$

la magnitud máxima de esta aceleración es:

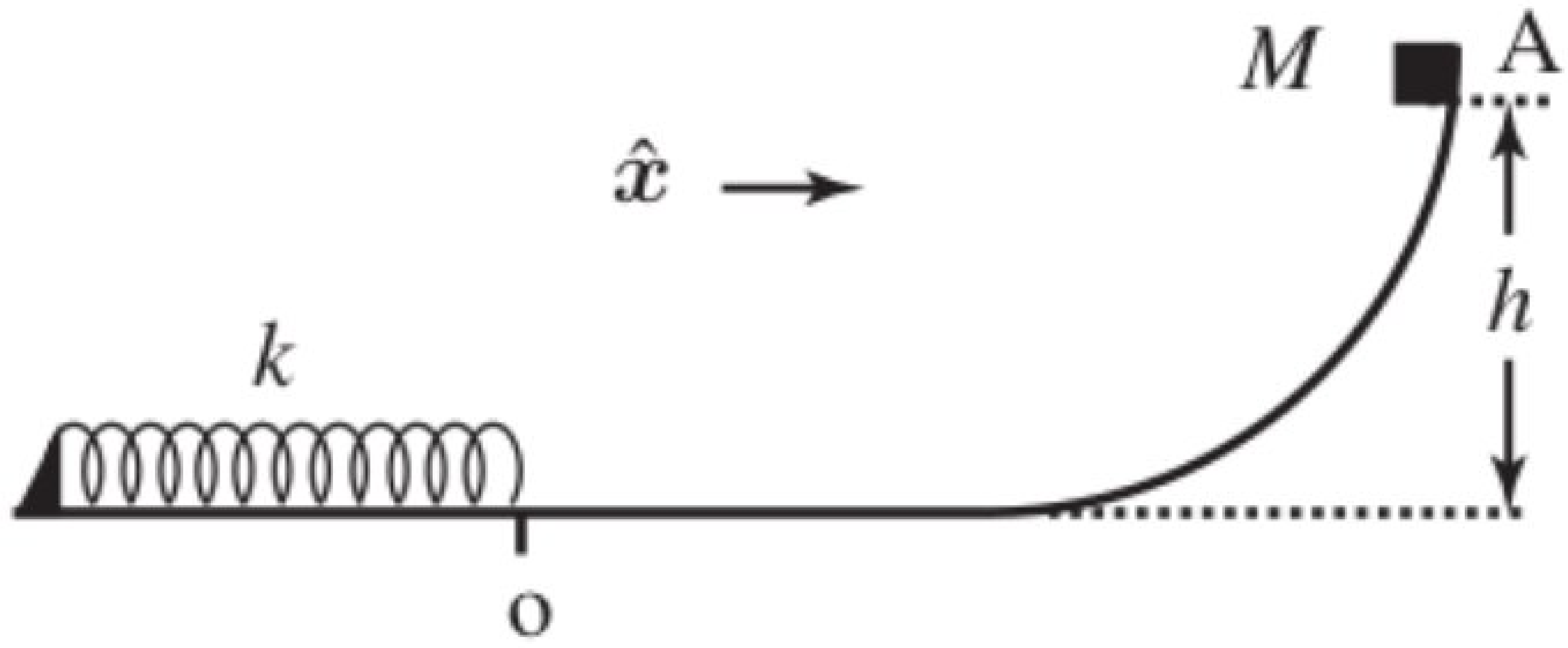
$$a_{máx}=A\,\omega^2$$

b) Para evitar que se despegue:

$$A\,\omega^2<g \rightarrow A<\frac{g}{\omega^2}$$

Ejercicio 36
La pista de la figura es lisa, en su porción horizontal tiene un resorte de constante elástica k con un extremo libre y un extremo fijo a una pared. Desde un punto A situado a una altura h parte del reposo un pequeño bloque de masa M. Cuando el bloque toca el resorte queda adherido al mismo y comienza a oscilar. Tome como instante t = 0 el momento de la colisión con el resorte y como origen de coordenadas el punto o (punto de equilibrio del resorte).

a) Halle la posición x(t) del bloque para $t \geq 0$.
b) Encuentre los vectores posición y velocidad del bloque para el instante $t = \tau/3$, donde τ es el período del movimiento oscilatorio.



Resolución:

a) E.c. general del MAS

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$$

x = 0 posición de equilibrio del extremo libre del resorte
x < 0 resorte se comprime
x > 0 resorte se estira

El bloque toca al resorte en el punto de equilibrio para t = 0

$$x(0) = 0$$

Por energía cinética la velocidad será:

$$Mgh=\frac{1}{2}M{v_o}^2$$

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

Antes de adherirse $v_0=-\sqrt{2gh}$ (porqué va a la izquierda)

Determinas A y φ

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=-A\,\omega sen(\omega t+\phi)$$

en t = 0
Posición: x(0) = Acos(φ) = 0 → cos(φ) = 0 → φ = π/2 ó 3π/2
Velocidad: v(0) = -Aωsen(φ) = $v_0=-\sqrt{2gh}$
Caso 1:
para φ = π/2
v(0) = -Aωsen(π/2) = -Aω(1) = -Aω

$$-A\omega=-\sqrt{2gh}\rightarrow A=\frac{\sqrt{2gh}}{\omega}=\sqrt{2gh}\cdot\sqrt{\frac{M}{k}}=\sqrt{\frac{2ghM}{k}}$$

A >0 es consistente con la amplitud

$$x(t)=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})=A(-sen(\omega t))=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}sen(\omega t)$$

Caso: φ = 3π/2

v(0) = -Aωsen(3π/2) = -Aω(-1) = Aω

$A\omega=-\sqrt{2gh}\rightarrow A=\frac{-\sqrt{2gh}}{\omega}$, como A debe ser positivo elegimos a π/2

Finalmente, la posición pata t ≥ 0 :

$$x(t)=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})=A(-sen(\omega t))=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}sen(\omega t)$$

b) Periodo del movimiento es

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

para t=T/3

$$t=T/3=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{M}{K}}$$

Posición:

$$x(\frac{T}{3})=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}sen(\sqrt{\frac{k}{M}}\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{M}{K}})=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}sen(2\frac{\pi}{3})$$

sen(2π/3) = sen(120°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x(\frac{T}{3})=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{\frac{2\cdot 3ghM}{4k}}=-\sqrt{\frac{3ghM}{2k}}$$

$$\vec{x}(\frac{T}{3})=-\sqrt{\frac{3ghM}{2k}}\hat{x}$$

Para v(T/3)

$$v(\frac{T}{3})=-A\omega sen(\omega t+\phi)=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}\sqrt{\frac{k}{M}}sen(\sqrt{\frac{k}{M}}t+\frac{\pi}{2})=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}\sqrt{\frac{k}{M}}\cos(\sqrt{\frac{k}{M}}t)$$

$$v(\frac{T}{3})=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}\sqrt{\frac{k}{M}}\cos(\sqrt{\frac{k}{M}}t\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{M}{K}})=-\sqrt{\frac{2ghM}{k}}\sqrt{\frac{k}{M}}\cos(\frac{2\pi}{3})$$

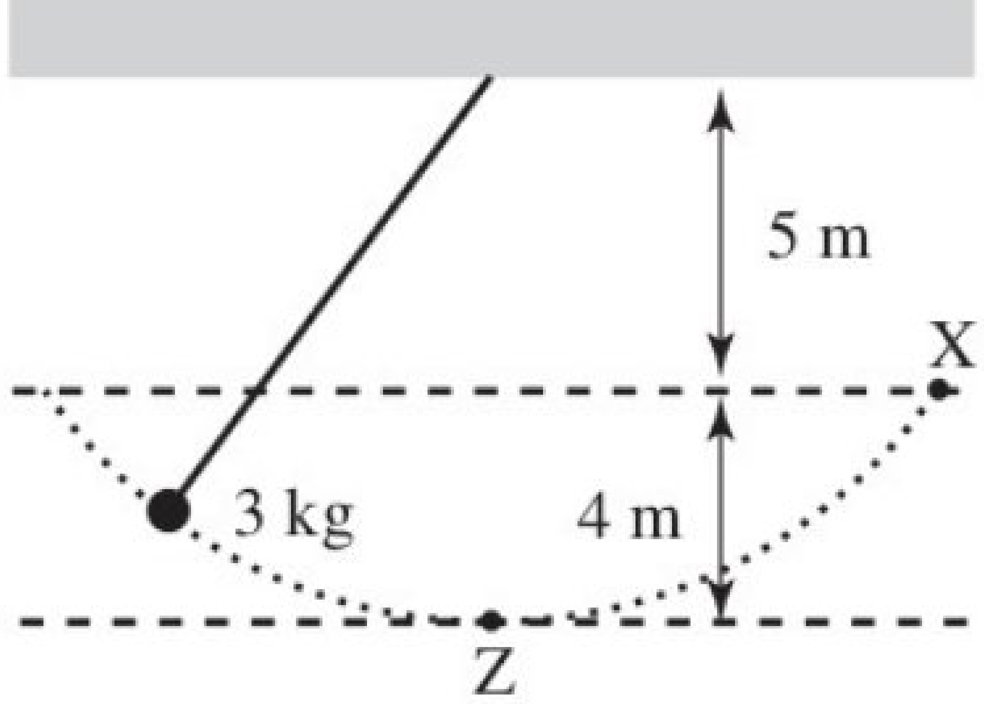
cos (2π/3) = -1/2

$$v(\frac{T}{3})=-\sqrt{2gh}(-\frac{1}{2})=\sqrt{2gh}(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2gh}}{2}=\sqrt{\frac{2gh}{4}}=\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

$$\vec{v}(\frac{T}{3})=\sqrt{\frac{gh}{2}}\hat{x}$$

Ejercicio 37

La figura representa un péndulo de 9 m de longitud y masa M=3 kg. El punto X es el más alto y Z el más bajo de la trayectoria. La rapidez de M, en m/s, en el punto Z es



Resolución:
La rapidez en el punto z se calcula usando la conservación de la energía mecánica
Diferencia de altura entre X y Z
posición más alta X, h = 4 m

Energía potencial en X: U = Mgh = 3kg.10m/s² .4m = 120 J
Energía cinética en Z: $\frac{1}{2} M v^2$

$$\frac{1}{2} M v^2 = 120$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 120}{3}} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\, m/s$$

Ejercicio 38
Una piedra de masa M se arroja verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v0 . Suponga que la fuerza de roce con el aire es constante y de módulo nMg (con n una constante positiva). La altura máxima h que alcanza la piedra es?

Resolución:

$$K_i = \frac{1}{2} M v_o^2 \quad , U_i = 0$$

W_g =- Mgh , U_f = Mgh

W_{fr} = -(nMg)h = -nMgh

W_{TOT} = W_g + W_{fr} = - Mgh – nMgh = -Mgh(1+n)

Teorema de trabajo y energía

$$W_{TOT} = \Delta K$$

$$\Delta K = K_f - K_i = -K_i = -1/2 M v_0^2$$

$$K_i = U_f$$

$$-\frac{1}{2} M v_0^2 = -Mgh(1+n)$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1+n)}$$

Ejercicio 38

Si la energía potencial gravitacional de una partícula aumenta, podemos afirmar que:

a) Su energía cinética disminuye

b) Su energía cinética aumenta

c) El trabajo realizado por el peso del cuerpo es positivo

d) El trabajo realizado por el peso del cuerpo es negativo

e) Su energía total aumenta

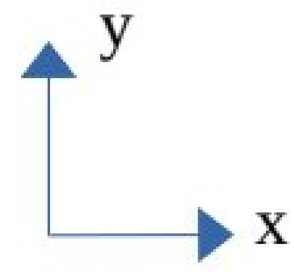
Resolución:

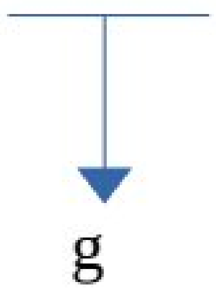
Recurriendo a la definición de trabajo tenemos que:

$$W_g = \int m\vec{g} \cdot d\vec{r}$$

$$W_g = \int mg(-\hat{j}) \cdot dy(\hat{j}) = -mgy(\hat{j})$$

$$W_g < 0$$





Finalmente, como el trabo es negativo la opción correcta es la **(d)** El trabajo realizado por el peso del cuerpo es negativo.

Ejercicio 39

Sobre una partícula que se mueve en el eje y, actúa una fuerza, F = (6y- 4) j N, en donde y es la posición de la partícula y todas las unidades están en el sistema MKS. El trabajo realizado por esta fuerza cuando la partícula se mueve desde y = 1 m hasta y = 2 m es:

a) 5 J

b) 3 J

c) 4 J

d) 12 J

e) Ninguna de las anteriores.

Resolución:

Partiendo de la definición de trabajo nos quedaría:

$$W = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F} \cdot d\vec{y} = \int_{y_1}^{y_2} (6y-4)(\hat{j}) \cdot dy(\hat{j}) = \int_{y_1}^{y_2} (6y-4)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} 6y\,dy - \int_{y_1}^{y_2} 4\,dy = 3y^2 - 4y\,\Big|_1^2$$

$$W = 3(2)^2 - 4(2) - (3(1)^2 - 4(1)) = 5J$$

Finalmente, la opción correcta es la **(a)** que el trabajo realiza 5 J.

Ejercicio 40

La posición de una partícula de masa m, conectada a un resorte que describe un movimiento armónico simple es x=x(t)=Acos(ωt+δ). En el instante inicial t = 0, se conoce que la posición inicial es $x(0) = 0$ y que la dirección de su velocidad inicial va en dirección positiva del eje x, entonces la fase inicial δ en radianes es:

a) 0

b) $\pi/2$

c) $-\pi/3$

d) $-\pi/2$

e) π

Resolución:

Para resolver este problema debemos a partir de las condiciones iniciales hallar las expresiones de posición y velocidad que nos permitan resolver las ecuaciones y conocer el desfasaje. Tenemos que:

$t = 0 \rightarrow x(0) = 0,\ v(0) > 0$

$$x = x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\,\omega sen(\omega t + \delta)$$

Sustituyendo los valores iniciales

$$x(0) = 0 = A\cos(\omega(0) + \delta)$$

$$0 = A\cos(\delta)$$

La amplitud es siempre positiva para todo tiempo, por lo tanto la ecuación se reduce a:

$$\cos(\delta) = 0$$

$$\delta = \arccos(0) = \pm\pi/2$$

Ahora trabajando la expresión de la velocidad con los valores iniciales:

$$v(0) = -A\,\omega sen(\omega(0) + \delta) = -A\,\omega sen(\delta)$$

$$sen(\delta) < 0$$

Por lo tanto, como el $sen(\delta)$ es < 0, entonces necesariamente la opción correcta es que el desfasaje sea $-\pi/2$ **(d)**.

Ejercicio 41

Con respecto al enunciado de la pregunta anterior, la energía cinética de la partícula de masa m cuando pasa por la posición de equilibrio es:

a) $mv^2/2 + m\omega^2A^2/2$

b) $m\omega^2A^2/2$

c) $mv^2/2 + kA^2/2$

d) $m\omega^2A^2$

e) Ninguna de las anteriores

Resolución:

En posición de equilibro la energía mecánica es igual a la energía cinética, en este problema la energía potencial proviene del resorte, entonces podemos decir que:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{expresión E. cinética}$$

$$E_{TOT}\, MAS = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{donde k es la constante del resorte}$$

su expresión es k = mω² ,donde la frecuencia es $\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}}$

$$E_{TOT}\, MAS = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2$$

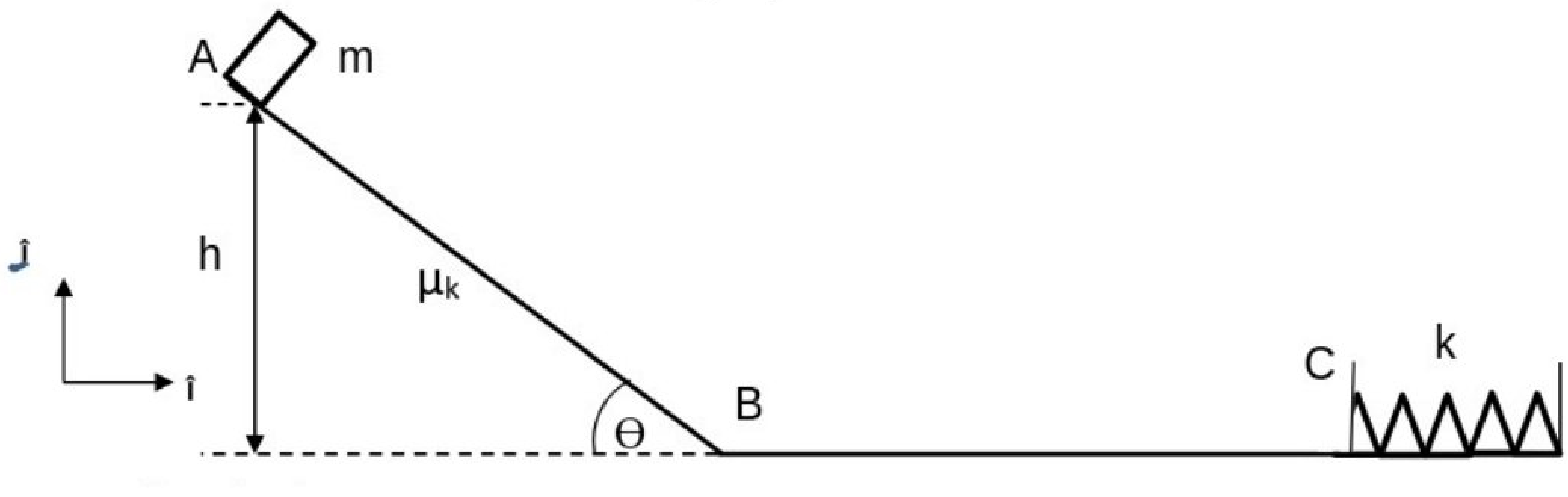
Nuestra expresión de energía cinética se reduce a :

$$K = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2$$

Por lo que la opción correcta es la **(b)**.

Ejercicio 42

Un bloque de masa m = 10 kg se encuentra en la parte superior de un plano inclinado rugoso, cuyo coeficiente de roce cinético es μk = 0,375. El plano inclinado forma un ángulo de inclinación de Θ = 45° con la horizontal. En el punto A, el bloque se suelta partiendo del reposo y desde una altura h = 8 m, baja y sigue por una superficie horizontal sin roce, en el punto C entra en contacto con un resorte de constante elástica k = 4(103) N/m



Conteste las siguientes tres preguntas:

La velocidad del bloque cuando toca el extremo libre del resorte es:

a) 10 i m/s

b) 5 i m/s

c) 2 i m/s

d) √(220)

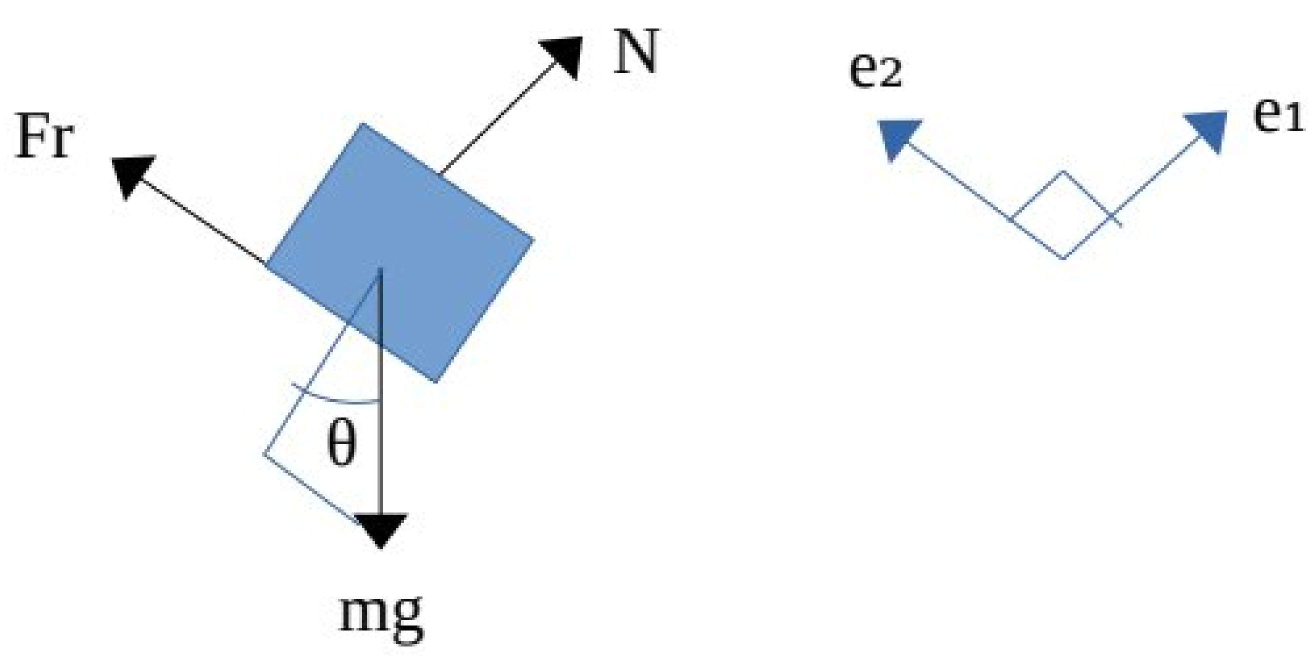
e) Ninguna de las anteriores.

Resolución:

Por tercera ley de la mecánica tenemos lo siguiente:

$$W^{NC}=(K_F+U_F)-(K_I+U_I)$$

Vamos hacer un diagrama de cuerpo libre de la masa:



$$\hat{e}_1: N-mgcos(\theta)=0$$

$$N=mgcos(\theta)$$

$$\hat{e}_2: -Fr+mgsen(\theta)=m\cdot a$$

Sabemos adicionalmente que la fricción es :

$$Fr=\mu_k N=\mu_k mgcos(\theta)$$

La fricción es la única fuerza no conservativa y que hace trabajo, por lo que tenemos:

$$W_{Fr}=\int_A^B \vec{F}r\cdot d\vec{r}=\int_A^B \mu_k mgcos(\theta)(\hat{e}_2)\cdot dr(-\hat{e}_2)=-Fr\cdot r\frac{A}{B}=-Fr(r_B-r_A)$$

donde $r_B - r_A = d$

$$sen(\theta)=\frac{h}{d}\rightarrow d=\frac{h}{sen(\theta)}$$

$$W_{Fr}=-Fr\frac{h}{sen(\theta)}=-\mu_k mgcos(\theta)\frac{h}{sen(\theta)}$$

$$W_{Fr}=K_F-U_I$$

$$-\mu_k mgcos(\theta)\frac{h}{sen(\theta)}=\frac{1}{2}mv^2-mgh \quad , \quad ctg(\theta)\rightarrow\theta=45°\rightarrow ctg(\theta)=1$$

Despejando v, nos quedaría:

$$v=\sqrt{2gh(1-\mu_k)}=10\,m/s$$

$$\vec{v}=10\,m/s\,\hat{i}$$

Ejercicio 43

La máxima compresión del resorte antes de detenerse momentáneamente es:

a) 0,5 m

b) 0,4 m

c) 0,2 m

d) 0,025 m

e) Ninguna de las anteriores.

Resolución:

Por conservación de energía mecánica tenemos:

$$K_F+U_F=K_I+U_I$$

Analizando el movimiento nos damos cuenta que al inicio antes de tocar al resorte en el extremo libre la energía potencial inicial es cero, y para la máxima compresión la velocidad es cero por lo que la energía cinética también lo es.

$$U_F=K_I$$

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2$$

$$x=v\sqrt{\frac{m}{k}}=10\sqrt{\frac{10}{4000}}=0.5\,m$$

Respuesta final opción **(a)**.

Ejercicio 44

Después que el resorte se descomprime por primera vez, la altura que alcanza el bloque respecto a la superficie horizontal, al detenerse momentáneamente es:

a) 11,3 m

b) 8 m

c) 6 m

d) 3,64 m

e) Ninguna de las anteriores.

Resolución:

Partiendo de la expresión hallada en la pregunta 5, tenemos que:

$$\mu_k mgcos(\theta)\frac{h}{sen(\theta)}+mgh=\frac{1}{2}kx^2$$

Despejamos h

$$h=\frac{1}{2}kx^2\frac{1}{mg(1+\mu_k)}$$

$$h=\frac{1}{2}(4000)(0.5)^2\frac{1}{10*10(1+0.375)}=3.64\,m$$

Ejercicio 45

Una partícula de masa m1 = 3 kg se dirige con una rapidez de 2 m/s hacia una partícula de masa m2 = 2 kg que inicialmente está en reposo. Si el choque entre estas partículas es una colisión elástica, las partículas inmediatamente después del choque tienen:

a) La misma velocidad de magnitud igual a 6/5 m/s.

b) Velocidades en sentidos opuestos con magnitudes iguales a 2/5 m/5 y 12/5 m/s.

c) Velocidades en sentidos opuestos con magnitudes iguales a 6/5 m/s y 16/5 m/s.

d) Velocidades en el mismo sentido con magnitudes iguales a 2/5 m/s y 12/5 m/s.

e) Ninguna de las anteriores.

Resolución:

A partir de las expresiones para velocidad en choque elástico tenemos que:

$$v_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1=\frac{3-2}{3+2}2=\frac{2}{5}m/s$$

$$v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1=\frac{2\cdot3}{3+2}2=\frac{12}{5}m/s$$

Las velocidades son de magnitud 2/5 y 12/5 en el mismo sentido (opción **d**).

Ejercicio 46

Una partícula de 1 kg de masa conectada a un resorte describe un movimiento armónico simple en una superficie horizontal sin roce. La posición de la partícula es: x = x(t) = A cos (ωt + δ). Se conoce que la velocidad angular del movimiento oscilatorio es de 5 rad/s. Suponga que en el instante t = 0, la posición y la velocidad de la partícula son: x = 0,2 m y v = - √3 m/s. Conteste a las siguientes dos preguntas:

El valor de la amplitud es:

a) 2/5 m

b) 4/5 m

c) 3/5 m

d) 1/5 m

e) Ninguna de las anteriores.

Resolución:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = -A\omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)$$

Para t = 0 → x = 0.2 m y v = $-\sqrt{3}$ m/s

$$x(0)=0.2=A\cos((5)(0)+\delta) \rightarrow 0.2=A\cos(\delta) \quad \text{Eq.1}$$

$$v(0)=-\sqrt{3}=-A(5)sen((5)(0)+\delta) \rightarrow -\sqrt{3}=-A(5)sen(\delta) \quad \text{Eq. 2}$$

Despejamos A de 1

$$A=\frac{0.2}{\cos(\delta)}$$

Sustituimos en 2

$$\sqrt{3}=\left(\frac{0.2}{\cos(\delta)}\right)(5)sen(\delta)$$

$$\sqrt{3}=(0.2)(5)tg(\delta)=1\cdot tg(\delta) \rightarrow \delta=arctg(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$$

Ahora simplemente sustituimos en A y conocemos su valor

$$A=\frac{0.2}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1/5}{1/2}=2/5\,m$$

Ejercicio 47

Con respecto al enunciado de la pregunta anterior, la energía potencial en el instante inicial es:

a) 5 J

b) 1/5 J

c) 0,5 J

d) 0,4 J

e) Ninguna de las anteriores.

Resolución:

$$U=\frac{1}{2}k x^2=\frac{1}{2}(25)(0.2)^2=0.5\,J$$